Transformation de Laplace

Laurence LAMOULIE

.
Année 2007-2008

Table des matières

1 Introduction et motivations

2 Transformation de Laplace dans E_0

La plupart des seconds membres des équatiosn différentielles qui interviennent dans les phénomènes physiques sont des fonctions dites "exponentielles-polynômes", c'est à dire qu'elles sont de la forme $t \mapsto f(t) = e^{rt}P(t)$ avec $r \in \mathbb{C}$ et P un polynôme à coefficients réels. On obtient ainsi la plupart des fonctions usuelles : les fonctions polynômes, sinusoïdales, exponentielles et les produits de telles fonctions.

En pratique on s'intéresse en physique à des phénomènes débutant à partir d'un instant $t = \alpha$ ($\alpha \geq 0$), et les fonctions sont donc nulles pour $t < \alpha$. La plupart des signaux vus en électronique peuvent être générés par des fonctions simples résultant d'opérations élémentaires sur des fonctions usuelles. D'où le choix de E_0 énoncé ci-après.

2.1 Définition de E_0

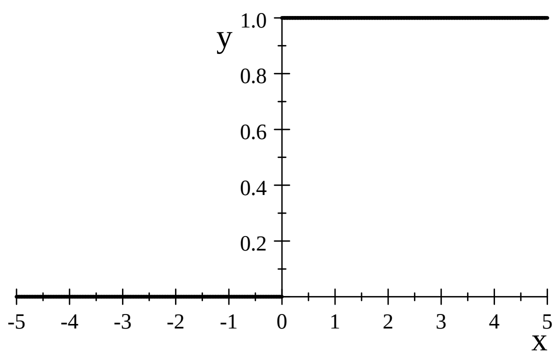
2.1.1 Fonctions causales

Définition : Une fonction f est dite causale si $f(t) = 0$ pour tout t strictement négatif

Exemple(s) Echelon unité U ou fonction de Heaviside H :

$$H : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

a pour représentation



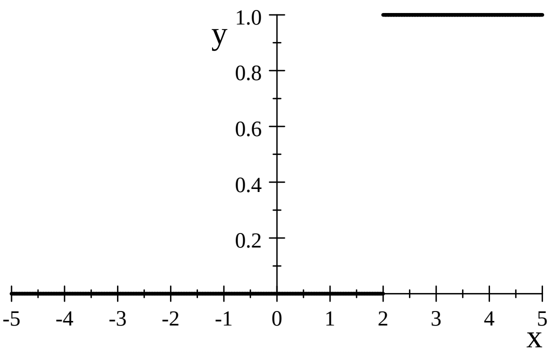
Exemple(s) Translatée de la fonction de Heaviside :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \longmapsto H(t-\alpha) \end{array}, \alpha \in \mathbb{R}$$

c'est à dire

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t < \alpha \\ 1 \text{ si } t \geq \alpha \end{cases} \end{array}$$

a pour représentation si $\alpha = 2$

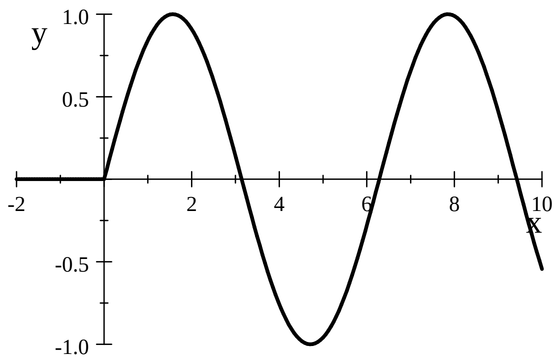


Remarque La fonction de Heaviside sert à "fabriquer" des fonctions causales.

Exemple(s) A partir de la fonction sinus, on construit la fonction causale

$$f_1 : t \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ \sin(t) \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

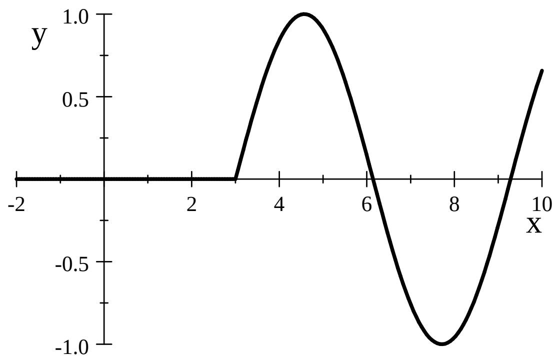
qui est également définie par $f_1(t) = \sin(t)H(t)$, ayant pour représentation



Exemple(s) A partir de la fonction f_1, on construit la fonction causale translatée

$$f_2 : t \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t < \alpha \\ \sin(t-\alpha) \text{ si } t \geq \alpha \end{cases}$$

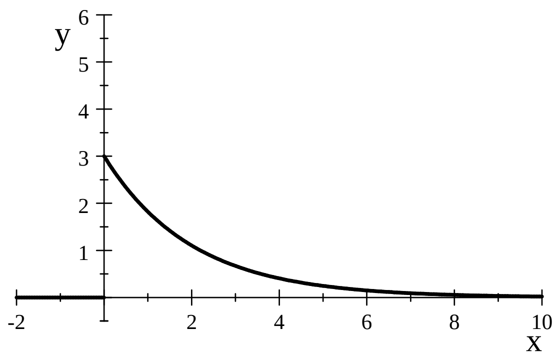
qui est également définie par $f_2(t) = \sin(t-\alpha)H(t-\alpha)$, ayant pour représentation si $\alpha = 3$



Exemple(s) A partir de la fonction g définie par $g(t) = 3e^{-t/2}$ on construit la fonction causale

$$g_1 : t \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 3e^{-t/2} \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

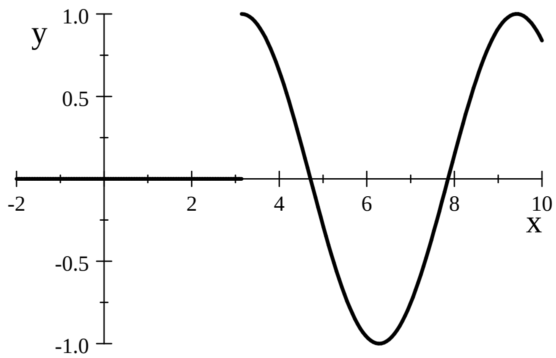
ayant pour représentation



Exemple(s) On peut également définir des fonctions causales en cosinus non continues, par exemple :

$$g_2 : t \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t < \pi \\ \cos(t-\pi) \text{ si } t \geq \pi \end{cases}$$

ayant pour représentation



2.1.2 Les fonctions de E_0

Définition E_0 est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires à coefficients réels ou complexes de fonctions de la forme :

$$t \mapsto H(t-\alpha)t^n e^{rt}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{C}$.

Exemple(s) f_1 définie par $f_1(t) = \sin(t)H(t)$ est une fonction de E_0 car $\sin(t)H(t) = \frac{1}{2i}e^{it}H(t) - \frac{1}{2i}e^{-it}H(t)$

Les fonctions de E_0 ont les propriétés suivantes :

- une fonction de E_0 est continue par morceaux avec un nombre fini de discontinuités
- E_0 est stable pour les opérations suivantes : $t \mapsto f(at)$, $t \mapsto f(t-b), t \mapsto e^{rt}f(t)$ c'est à dire que si $f \in E_0$, la nouvelle fonction construite à partir de f par l'un de ces procédés l'est aussi.
- E_0 est stable par dérivation
- Si $f \in E_0$, la fonction définie par $t \mapsto \int_0^t f(x)dx$ appartient aussi à E_0.

2.2 Transformation de Laplace dans E_0

2.2.1 Généralités

Définition Si une fonction g est de la forme $g(t) = kH(t-\alpha)t^n e^{rt}$ avec $k \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R}_+$, le nombre r est appelé exposant de la fonction g.

Proposition Soit g une fonction dont l'exposant r est réel. L'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)e^{-pt}dt$ est absolument convergente si p est strictement supérieur à r, exposant de g.

Preuve On a $|g(t)e^{-pt}| = |kH(t-\alpha)t^n e^{rt} e^{-pt}| = |k|\, t^n e^{(r-p)t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. A l'aide de la **Règle $x^\alpha f(x)$ en $+\infty$** qui est rappelée ci-dessous, on peut conclure.
Règle $x^\alpha f(x)$ en $+\infty$: Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que $f \geq 0$.

- S'il existe $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $x^\alpha f(x) \underset{x \to +\infty}{\to} 0$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.
- S'il existe $\alpha \in]-\infty, 1]$ tel que $x^\alpha f(x) \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

En effet si on prend $\alpha = 2$, alors $t^2 t^n e^{(r-p)t} \underset{t \to +\infty}{\to} 0$ si $r - p < 0$ soit $p > r$. Dans ce cas le résultat s'applique et $\displaystyle\int_a^{+\infty} t^n e^{(r-p)t} dt$ converge comme annoncé.
Dans le cas où $p \leq r$, il suffit de prendre $\alpha = 0$ *pour* obtenir $t^n e^{(r-p)t} \underset{t \to +\infty}{\to} +\infty$ ce qui implique que $\displaystyle\int_a^{+\infty} t^n e^{(r-p)t} dt$ diverge.

Remarque Dans le cas où l'exposant $r \in \mathbb{C}$, on a $e^{rt} = e^{at}.e^{ibt}$ donc $\left|e^{(r-p)t}\right| = \left|e^{(a-p)t}\right|\left|e^{ibt}\right| = e^{(a-p)t}\left|e^{ibt}\right|$ donc avec le même choix de α on obtient $\left|t^2 t^n e^{(r-p)t}\right| = t^2 t^n e^{(a-p)t}\left|e^{ibt}\right| \underset{t \to +\infty}{\to} 0$ si $a - p < 0$ comme précédemment.

On admettra le résultat suivant qui se démontre sans difficulté :

Proposition Soit $f \in E_0$.L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ est absolument convergente si p est un nombre réel appartenant à $]\sigma(f), +\infty[$ où $\sigma(f)$ est **la plus grande des parties réelles** des exposants des fonctions composant la combinaison linéaire réalisant f.

Remarque La condition $p \in]\sigma(f), +\infty[$, étant une condition suffisante de convergence absolue, c'est aussi une condition suffisante de convergence.

Définition $\sigma(f)$ est appelé **abscisse de convergence** de f.

Exemple(s) Soit f définie par $f(t) = e^{2t}\cos 3t.H(t) + te^t \sin t.H(t-\pi)$. En utilisant les formules d'Euler on a

$$f(t) = \frac{1}{2}H(t)e^{(2+3i)t} + \frac{1}{2}H(t)e^{(2-3i)t} + \frac{1}{2i}t.H(t-\pi)e^{(1+i)t} - \frac{1}{2i}t.H(t-\pi)e^{(1-i)t}$$

Les exposants des différentes fonctions composant f sont $2+3i$, $2-3i$, $1+i$, $1-i$. Leurs parties réelles sont donc 2 et 1, donc $\sigma(f) = 2$.

2.2.2 Définition de la transformée de Laplace

Définition Soit $f \in E_0$ d'abscisse de convergence $\sigma(f)$. La transformée de Laplace de f, notée $\mathcal{L}(f)$ ou $\mathcal{L}_f$ est la fonction F définie sur $]\sigma(f), +\infty[$ par

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

On note $F = \mathcal{L}_f$ ou $F = \mathcal{L}(f)$ ou $F(p) = \mathcal{L}(f)(p)$ ou $F(p) = \mathcal{L}_f(p)$.
$\mathcal{L}$ désigne la transformation de Laplace $f \mapsto F$

Exemple(s) $\mathcal{L}(e^{rt})(p) = \int_0^{+\infty} e^{rt}e^{-pt}dt$ pour $p > \text{Re}(r)$ donc $\mathcal{L}(e^{rt})(p) = \int_0^{+\infty} e^{(r-p)t}dt = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{1}{r-p}e^{(r-p)t}\right]_0^A = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{r-p}\left[e^{(r-p)A} - 1\right]$
Si on note $r = b + ic$, on a $e^{(r-p)A} = e^{(b+ic-p)A} = e^{icA}e^{(b-p)A}$ donc $\left|e^{(r-p)A}\right| = \left|e^{icA}e^{(b-p)A}\right| = \left|e^{icA}\right| e^{(b-p)A}$. Comme $b - p < 0$ on a $\lim_{A\to+\infty} e^{(b-p)A} = 0$ donc $\mathcal{L}(e^{rt})(p) = \frac{-1}{r-p} = \frac{1}{p-r}$.

$$\boxed{\mathcal{L}(e^{rt})(p) = \frac{1}{p-r} \text{ pour } p > \text{Re}(r)}$$

Exemple(s) Soit $\alpha > 0$. $\mathcal{L}(H(t-\alpha)e^{rt})(p) = \int_0^{+\infty} H(t-\alpha)e^{rt}e^{-pt}dt = \int_\alpha^{+\infty} e^{(r-p)t}dt$. Si $p > \text{Re}(r)$ on obtient $\int_\alpha^{+\infty} e^{(r-p)t}dt = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{1}{r-p}e^{(r-p)t}\right]_\alpha^A = \frac{1}{p-r}e^{(r-p)\alpha}$.

$$\boxed{\mathcal{L}(H(t-\alpha)e^{rt})(p) = \frac{1}{p-r}e^{(r-p)\alpha} \text{ pour } p > \text{Re}(r),\ \alpha > 0}$$

Exemple(s) $\mathcal{L}(te^{rt})(p) = \int_0^{+\infty} te^{(r-p)t}dt = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A te^{(r-p)t}dt = \lim_{A\to+\infty} I_A$
On fait une IPP avec

$$\left\{\begin{array}{c} u = t \\ v' = e^{(r-p)t} \end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{c} u' = 1 \\ v = \frac{1}{r-p}e^{(r-p)t} \end{array}\right.$$

donc $I_A = \left[\frac{t}{r-p}e^{(r-p)t}\right]_0^A - \frac{1}{r-p}\int_0^A e^{(r-p)t}dt = \frac{A}{r-p}e^{(r-p)A} - \frac{1}{r-p}\left[\frac{1}{r-p}e^{(r-p)t}\right]_0^A = \frac{A}{r-p}e^{(r-p)A} - \frac{1}{(r-p)^2}\left(e^{(r-p)A} - 1\right)$. L'abscisse de convergence de te^{rt} est toujours $\text{Re}(r)$ donc pour $p > \text{Re}(r)$ on a $\lim_{A\to+\infty} \frac{A}{r-p}e^{(r-p)A} = 0$, $\lim_{A\to+\infty} e^{(r-p)A} = 0$, d'où $\mathcal{L}(te^{rt})(p) = \frac{1}{(r-p)^2}$

$$\boxed{\mathcal{L}(te^{rt})(p) = \frac{1}{(r-p)^2} \text{ pour } p > \text{Re}(r)}$$

Remarque La tranformée de Laplace peut être définie comme l'opération qui à f, fonction quelconque, associe $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$, donc dans ce cas on ne parle pas de fonction causale. On aura alors par exemple $\mathcal{L}(\cos t)(p)$ à la place de $\mathcal{L}(\cos t.H(t))(p)$.

2.3 Propriétés de la transformée de Laplace dans E_0

On suppose toujours que p appartient à un intervalle où toutes les transformées utilisées sont définies. Les fonctions utilisées sont toujours causales.

2.3.1 Linéarité

Proposition Soient f et g sont des fonctions de E_0, de transformées de Laplace $F = \mathcal{L}(f)$ et $G = \mathcal{L}(g)$ respectivement, et soient $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C}$ Alors

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)(p) = \alpha\mathcal{L}(f)(p) + \beta\mathcal{L}(g)(p), \text{ pour tout } p \in]\sigma(h), +\infty[$$

où $\sigma(h)$ est la partie réelle du plus grand exposant figurant dans les fonctions f et g.

2.3.2 Transformée d'une dilatée

Connaissant la transformée de Laplace d'une fonction f, notée F, on cherche celle de la fonction $t \mapsto f(at)$.

Définition On appelle dilatée de f la fonction $t \mapsto f(at)$, $a \in \mathbb{R}_+^*$

Proposition Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\boxed{\mathcal{L}(f(at))(p) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(f)(\frac{p}{a}) \text{ pour } p > \mathrm{Re}(r)}$$

Preuve $\mathcal{L}(f(at))(p) = \lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A f(at)e^{-pt}dt$.
On procède au changement de variable $u = at$ soit $du = adt$.
$\mathcal{L}(f(at))(p) = \lim\limits_{A \to +\infty} \frac{1}{a} \int_0^{aA} f(u)e^{-pu/a}du = \frac{1}{a} \lim\limits_{aA \to +\infty} \int_0^{aA} f(u)e^{-pu/a}du = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu/a}du = \frac{1}{a}\mathcal{L}(f)(\frac{p}{a})$ si $\frac{p}{a} > \sigma(f) \Leftrightarrow p > a.\sigma(f)$ car $a \in \mathbb{R}_+^*$.

2.3.3 Transformée d'une translatée

Définition On appelle translatée de f la fonction $t \mapsto f(t - \tau)$, $\tau \in \mathbb{R}_+^*$

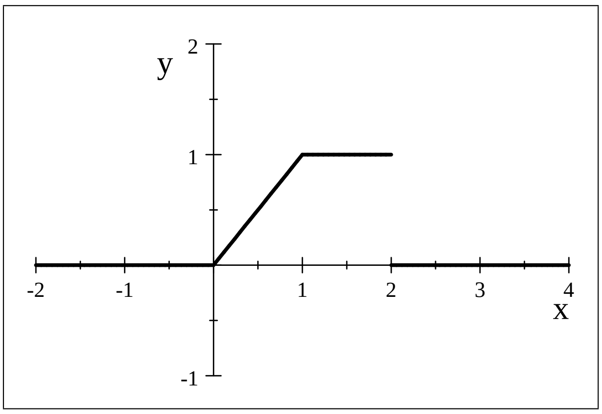
Proposition On a

$$\boxed{\mathcal{L}(f(t-\tau))(p) = e^{-p\tau}\mathcal{L}(f)(p) \text{ pour } p > \mathrm{Re}(r)}$$

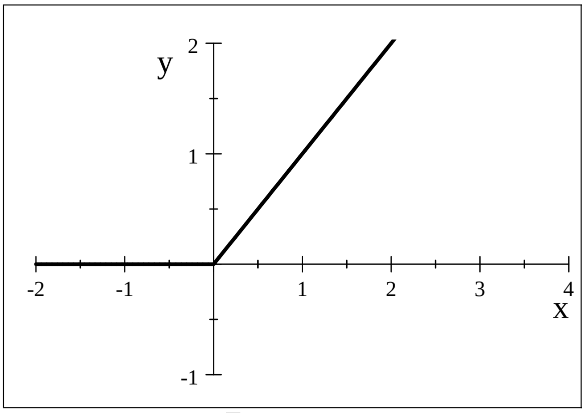
La quantité $e^{-p\tau}$ est appelée **facteur retard**. Lorsqu'une fonction est "retardée" d'un temps τ, sa transformée est multipliée par $e^{-p\tau}$.

Preuve $\mathcal{L}(f(t-\tau))(p) = \int_0^{+\infty} f(t-\tau)e^{-pt}dt = \lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A f(t-\tau)e^{-pt}dt$. On pose $u = t - \tau$ d'où $du = dt$, on obtient :
$\mathcal{L}(f(t-\tau))(p) = \lim\limits_{A \to +\infty} \int_{-\tau}^{A-\tau} f(u)e^{-p(u+\tau)}du = \int_{-\tau}^{0} f(u)e^{-p(u+\tau)}du + \lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^{A-\tau} f(u)e^{-p(u+\tau)}du$.
Comme f est causale la première intégrale est nulle, donc on a
$\mathcal{L}(f(t-\tau))(p) = \lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^{A-\tau} f(u)e^{-p(u+\tau)}du = \int_0^{+\infty} f(u)e^{-p(u+\tau)}du = e^{-p\tau}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu}du = e^{-p\tau}\mathcal{L}(f)(p)$.

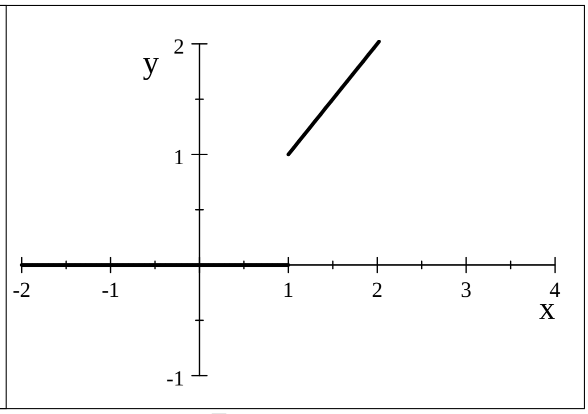
Exemple(s) Application au calcul de fonctions définies par morceaux.
On veut calculer la transformée du signal $t \mapsto e(t)$ défini par sa représentation graphique :



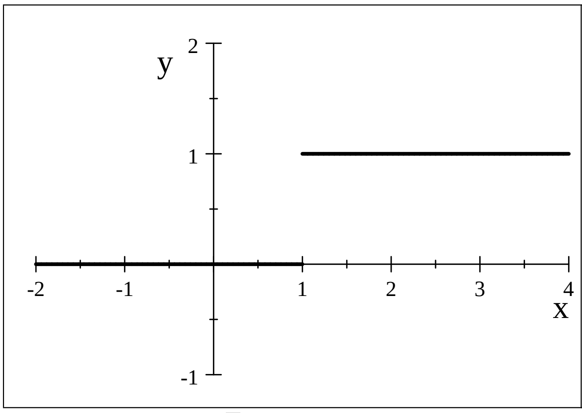
soit $e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \text{ ou } x > 2 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. On ne peut pas utiliser les fonctions locales sans précaution.
On décompose donc la fonction sous forme de somme. On utilise les fonctions ci-dessous :



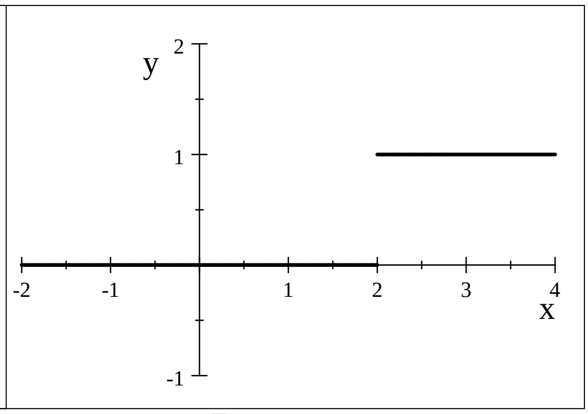
Fonction e_1



Fonction e_2



Fonction e_3



Fonction e_4

En formant $e_1 - e_2 + e_3 - e_4$ on obtient la fonction e. On en déduit que

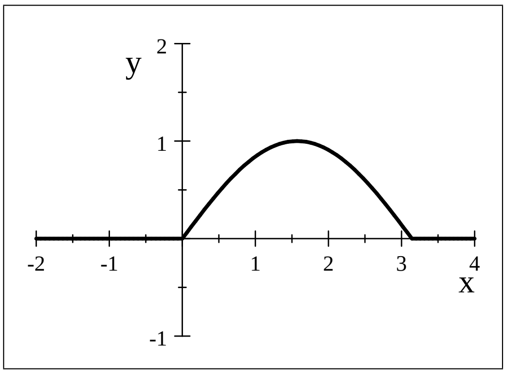
$$\begin{aligned} e(t) &= tH(t) - tH(t-1) + H(t-1) - H(t-2) \\ &= tH(t) + (1-t)H(t-1) - H(t-2) \end{aligned}$$

On utilise ensuite la linéarité de la transformation de Laplace pour montrer que :

$$\mathcal{L}(e)(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}e^{-p} - \frac{1}{p}e^{-2p}$$

Exemple(s) à traiter à la maison.
Déterminer la transformée de Laplace de la fonction i définie par

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \text{ ou } t > \pi \\ \sin t & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$



Fonction i

2.3.4 Multiplication par la variable

On admet que pour $p > \sigma(f)$:

$$\boxed{\mathcal{L}(-tf(t))(p) = \frac{d\mathcal{L}(f)}{dp}(p)}$$

Par conséquent

$$\boxed{\mathcal{L}\left[(-t)^n f(t)\right](p) = \frac{d^n\mathcal{L}(f)}{dp^n}(p)}$$

ce que l'on peut aussi exprimer par :

$$\boxed{\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right](p) = (-1)^n \frac{d^n\mathcal{L}(f)}{dp^n}(p)}$$

Remarque Pour information, ces résultats découlent d'une propriété relative aux intégrales généralisées dépendant d'un paramètre, elles-mêmes liées aux fonctions de plusieurs variables. Le théorème fondamental est énoncé ci-dessous :

Théorème Soit φ une fonction continue sur $I \times [a, +\infty[$, dérivable par rapport à sa première variable s. On suppose que

- $\int_a^{+\infty} \varphi(s,t)dt$ converge simplement,
- $\frac{\partial\varphi(s,t)}{\partial s}$ est continue sur $I \times [a, +\infty[$,
- $\int_a^{+\infty} \frac{\partial\varphi(s,t)}{\partial s}dt$ converge uniformément,

Alors $\phi(s) = \int_a^{+\infty} \varphi(s,t)dt$ est dérivable et

$$\frac{d\phi}{ds}(s) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial\varphi(s,t)}{\partial s}dt$$

2.3.5 Multiplication par e^{-at}, où $a \in \mathbb{R}$

On montre facilement que pour tout $p > -a + \sigma(f)$ on a :

$$\boxed{\mathcal{L}(e^{-at}f(t))(p) = \mathcal{L}(f)(p+a)}$$

Preuve A faire en exercice

2.3.6 Transformée d'une dérivée

Si $f \in E_0$, alors $\lim\limits_{t\to 0_+} f(t)$ existe dans $\mathbb{C}$. On pose $f(0_+) = \lim\limits_{t\to 0_+} f(t)$.

Pour $p > \sigma(f)$ on a $F(p) = \mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$. On suppose que $f \in C^1(]0, +\infty[)$, alors f' est continue sur $]0, +\infty[$. On a :

$$\int_\varepsilon^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = \left[f(t)e^{-pt}\right]_\varepsilon^{+\infty} + p\int_\varepsilon^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

En passant à la limite pour $A \to +\infty$ et pour $\varepsilon \to 0_+$, on montre que :

$$\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = -f(0_+) + p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

soit

$$\boxed{\mathcal{L}\left[f'(t)\right](p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0_+)}$$

On admet que si $f \in E_0$ est seulement continue sur $]0, +\infty[$ (c'est à dire qu'on ne suppose plus que f' soit continue), le résultat reste vrai.

Si f' est à son tour continue, on a :

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right](p) = p\mathcal{L}(f')(p) - f'(0_+)$$

et en appliquant le résultat précédent à f', on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[f''(t)\right](p) &= p\left[p\mathcal{L}(f)(p) - f(0_+)\right] - f'(0_+) \\ &= p^2\mathcal{L}(f)(p) - pf(0_+) - f'(0_+) \end{aligned}$$

Exemple(s) Soit f définie par $f(t) = \cos(\omega t)H(t)$.
$f'(t) = -\omega\sin(\omega t)H(t) + \cos(\omega t)H'(t)$ or $H'(t) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc
$f'(t) = -\omega\sin(\omega t)H(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Vérifions que $\mathcal{L}\left[f'(t)\right](p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0_+)$.

D'une part on calcule : $\mathcal{L}(f)(p) = \mathcal{L}(\cos(\omega t)H(t))(p) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$, et $f(0_+) = \cos(0)H(0_+) = 1$ donc le second membre vaut $p\mathcal{L}(f)(p) - f(0_+) = \frac{p}{p^2+\omega^2} - 1$.

D'autre part on calcule : $\mathcal{L}\left[f'(t)\right](p) = \mathcal{L}\left[-\omega\sin(\omega t)H(t)\right](p) = -\omega\mathcal{L}\left[\sin(\omega t)H(t)\right](p) = -\omega\frac{\omega}{p^2+\omega^2} = -\frac{\omega^2}{p^2+\omega^2}$

Les deux quantités sont bien égales.

2.3.7 Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

Théorème Théorème de la valeur initiale

Si une fonction $f \in E_0$ admet pour transformée de Laplace F, alors non seulement $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$ mais encore

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0_+)$$

Théorème Théorème de la valeur finale

Si une fonction $f \in E_0$ admet pour transformée de Laplace F, et si $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ existe et est finie alors

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = \lim_{t\to\infty} f(t)$$

Remarque Ces théorèmes sont utilisés en physique, le premier pour déterminer les conditions initiales, le second pour connaître le comportement d'n système lorsque $t \to \infty$.

2.4 Convolution dans E_0

2.4.1 Définition

Définition Convoluée

La convoluée $h = f * g$ de deux fonction f et g définies sur $\mathbb{R}$, est définie (sous réserve de convergence de l'intégrale) par :

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$$

Remarque Si f est causale, alors l'intégrale devient :

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{0}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$$

Si g est aussi causale, alors

- si $x < 0$, $h(x) = 0$ car $x - t < 0$, $\forall t \geq 0$

- si $x \geq 0$, $h(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$ car $g(x-t) = 0$ si $t > x$.

Il en découle la définition suivante :

Définition Soient f et g deux fonctions de E_0. On appelle convoluée de f et g (dans cet ordre), la fonction causale h définie pour tout x positif par :

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

Proposition
$f * g = g * f$
$f * (g + s) = f * g + f * s$
Si f et g sont dans E_0, $f * g \in E_0$

2.4.2 Transformée de Laplace de $f * g$

On admettra le théorème suivant :

Théorème Soient f et g deux fonctions de E_0 alors la convoluée $h = f * g$ a pour transformée de Laplace, le produit des transformées de f et g soit

$$\mathcal{L}(f * g)(p) = \mathcal{L}(f)(p).\mathcal{L}(g)(p)$$

pour $p > \max(\sigma(f), \sigma(g))$.

2.4.3 Transformée de $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ (primitive de f s'annulant en 0)

Soi f une fonction continue de E_0. On a :

$\forall x > 0, \qquad (H * f)(x) = \int_0^x f(t)H(x-t)dt = \int_0^x f(t)dt.$

Sachant que $\mathcal{L}(H)(p) = \frac{1}{p}$ et en appliquant le théorème précédent, on obtient :

$$\mathcal{L}(\int_0^x f(t)dt)(p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f)(p)$$

2.5 Image et transformation inverse

Toutes les transformées de fonctions de E_0 sont des combinaisons linéaires de produits de fractions rationnelles par des exponentielles $e^{-p\tau}$ (τ est le retard). On admet que la réciproque est vraie, c'est à dire que sur l'ensemble de ces combinaisons linéaires on peut définir $\mathcal{L}^{-1}$, transformation inverse de $\mathcal{L}$.

On utilise donc des décompositions en éléments simples pour connaître certaines transformées inverses.

Définition On appelle **original** ou **transformée inverse**, la fonction f dont la transformée est F, donnée.

2.6 Tableau des transformées dans E_0

pour $f \in E_0$	$F(p) = \mathcal{L}(f)(p)$
$H(t)$	$\frac{1}{p}$
$tH(t)$	$\frac{1}{p^2}$
$t^n H(t), n \in N$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-at}H(t)$	$\frac{1}{p+a}$
$\sin(\omega t)H(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)H(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\mathrm{sh}(\omega t)H(t)$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$\mathrm{ch}(\omega t)H(t)$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
$f(at), a > 0$	$\frac{1}{a}F(\frac{p}{a})$
$f(t-\tau)$	$e^{-\tau p}F(p)$
$f(t)e^{-at}$	$F(p+a)$
$f'(t)$	$pF(p) - f(0_+)$
$f''(t)$	$p^2 L(f)(p) - pf(0_+) - f'(0_+)$
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{F(p)}{p}$
$-tf(t)$	$\frac{dF}{dp}(p)$
$(-1)^n t^n f(t)$	$\frac{d^n F}{dp^n}(p)$
pour f et g dans E_0 $(f * g)(x) = H(t)\int_0^t f(u)g(t-u)du$	si $G = \mathcal{L}(g)$, $F(p) \times G(p)$

2.7 Utilisation

Exemple(s) Calcul de la transformée de Laplace de f définie par $f(t) = \sin(3t)\cos(2t).H(t)$

Exemple(s) Détermination de l'originale de la fonction G définie par $G(p) = \frac{p}{p^2+4p+13}$

Exemple(s) Détermination de l'originale de la fonction F définie par $F(p) = \frac{2p+1}{p^2(p^2+4)}$

3 Extension de la transformation de Laplace

On étend la transformation à toutes les fonctions f vérifiant :

1. f est causale
2. f est localement sommable sur $\mathbb{R}_+$ au sens où : $\int_0^a |f(t)|\,dt$ existe $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$
3. Il existe un nombre réel p_0 tel que $\lim\limits_{T\to\infty} \int_0^T |f(t)|\,e^{-p_0 t}dt$ existe

De telles fonctions appartiennent à un ensemble appelé E, pour lequel on peut montrer que $\forall f \in E$, $\exists\, \sigma(f)$ abscisse de convergence de f tel que :

$$\forall p > \sigma(f), \quad \lim_{A\to\infty} \int_0^A |f(t)|\,e^{-pt}dt \text{ existe}$$

On définit alors de la même façon que précédemment la fonction transformée de Laplace F sur $]\sigma(f), +\infty[$ par $F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$

Exemple(s) de fonction de E n'appartenant pas à E_0
Si g est une fonction périodique, continue par morceaux sur une période, alors $f = g.H$ est causale et bornée mais elle n'appartient pas à E_0.

Toutes les propriétés démontrées sur E_0 restent vraies sur E. On peut aussi utiliser le tableau pour calculer des transformées ou des originaux.

4 Applications - Calcul symbolique

Les applications concernent par exemple la résolution de problèmes différentiels régis par des équations différentielles linéaires du 1er ou du 2nd ordre, dont les seconds membres et les solutions doivent être causaux pour permettre l'utilisation de la transformation de Laplace.

5 Impulsion unité

On utilise très fréquemment en physique la symbolisation d'une impulsion électrique ponctuelle en $t = 0$. Ce n'est pas une fonction puisque l'impulsion unité "vaut" $+\infty$ en 0 et 0 partout ailleurs. C'est une pseudo-fonction ou distribution, appelée distribution de Dirac, et notée δ.

Nous admettrons que
$$\mathcal{L}(\delta)(p) = 1$$