2.2 TRANSFORMATION DE LAPLACE DANS E. EXEMPLES

A. DEFINITION

Soit f un élément de E, alors il existe un nombre réel (éventuellement $-\infty$) noté $\sigma(f)$ et appelé **abscisse de convergence de** f tel que :

$$\forall p > \sigma(f) \quad \lim_{A \to +\infty} \int_0^A |f(t)|\, e^{-pt} dt \text{ existe}$$

Dans ces conditions : $\lim_{A \to +\infty} \int_0^A f(t)\, e^{-pt} dt$ existe, quantité notée $\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt} dt$ (propriété admise)[13].

On définit ainsi une fonction F de la variable p sur l'intervalle $]\sigma(f), +\infty[$, éventuellement sur $\mathbb{R}$. Cette fonction F, définie sur cet intervalle (qui est $\mathbb{R}$ tout entier si $\sigma(f) = -\infty$) par :

$$\boxed{F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt}$$

est appelée **transformée de Laplace de f.**

Cette définition étend, bien évidemment, la transformation de Laplace dans E_0. Nous conservons dans la suite du cours les mêmes notations que celles utilisées dans E_0. Les exemples qui suivent sont relatifs à des fonctions qui sont dans E mais qui ne sont pas dans E_0.

B. EXEMPLES DE TRANSFORMEES DE LAPLACE DE FONCTIONS DE E.

Examinons le cas des **fonctions périodiques, continues par morceaux sur une période.**

Soit g une fonction périodique, de période T, continue ou continue par morceaux sur $[0, T]$. Considérons alors la fonction $f = gU$ (U échelon unité) ; elle est causale et bornée car g est bornée sur un intervalle d'amplitude une période.

On en déduit que si $p > 0$ alors

$$|f(t)| e^{-pt} \leq K e^{-pt}$$

avec K constante réelle. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-pt} dt$ est convergente ($p > 0$), on en déduit que la fonction f appartient à E.

Sans chercher à connaître $\sigma(f)$, calculons pour $p > 0$ la transformée de Laplace de f à l'aide de la limite de $\int_0^{kT} f(t) e^{-pt} dt$ lorsque k tend vers $+\infty$. Puisque k et T sont positifs, nous avons :

$$\int_0^{kT} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{kT} g(t) e^{-pt} dt = \int_0^{T} g(t) e^{-pt} dt + \int_T^{2T} g(t) e^{-pt} dt + \cdots + \int_{(k-1)T}^{kT} g(t) e^{-pt} dt$$

A l'aide de changement de variable+7[14] et en utilisant la périodicité de g, on obtient :

$$\int_0^{kT} g(t) e^{-pt} dt = \left[1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \cdots + e^{-(k-1)pT}\right] \cdot \int_0^{T} g(t) e^{-pt} dt$$

Comme $0 < e^{-pT} < 1$, puisque $p > 0$, le crochet précédent représente une somme dont la limite lorsque k tend vers $+\infty$ est $\frac{1}{1 - e^{-pT}}$ (somme d'une série géométrique de raison e^{-pT}).

On en déduit qu'en posant $f_0(t) = f(t)$ si $t \in [0, T]$, et $f_0(t) = 0$ sinon :

$$\boxed{\mathcal{L}[f](p) = \mathcal{L}[Ug](p) = \frac{\mathcal{L}[f_0](p)}{1 - e^{-pT}}}$$

Exemple 1

On se propose de déterminer la transformée de Laplace du signal f, causal et "périodique", défini sur $[0, T[$ par $f(t) = t$.

---

[14] Dans les intégrales du type : $\int_{\alpha T}^{(\alpha+1)T} g(t) e^{-pt} dt$ avec α entier naturel non nul, on effectue le changement de variable $u = t - \alpha T$.

La représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée à la figure 15.

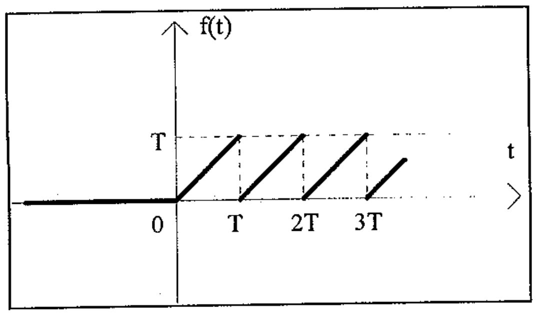

Fig 15

Considérons la fonction f_0 définie par $f_0(t) = f(t).[U(t) - U(t-T)]$. Sa représentation graphique est donnée à la figure 16.

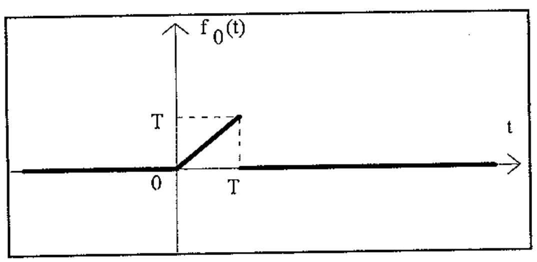

Fig 16

Nous avons :

$$f_0(t) = tU(t) - tU(t-T)$$
$$f_0(t) = tU(t) - (t-T+T)U(t-T)$$
$$f_0(t) = tU(t) - (t-T)U(t-T) - TU(t-T)$$

Avec cette écriture, on obtient :

$$f_0(t) \sqsupset F_0(p) \text{ avec } F_0(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}e^{-pT} - T\frac{1}{p}e^{-pT}$$

En notant F la transformée de Laplace de f :

$$F(p) = F_0(p) \times \frac{1}{1-e^{-pT}}$$

soit

$$F(p) = \left[\frac{1-e^{-pT}}{p^2} - \frac{T}{p}e^{-pT}\right] \times \frac{1}{1-e^{-pT}}$$

$$\boxed{F(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{Te^{-pT}}{1-e^{-pT}}}$$

Exemple 2

On considère la fonction causale, périodique de période π, définie sur $[0,\pi[$ par $f(t) = \sin(t)$.

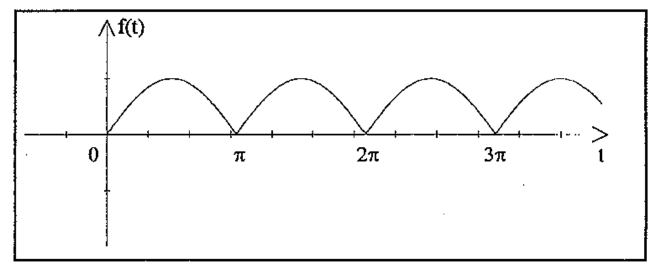

Fig 17

En posant : $f_0(t) = (\sin(t)).[U(t) - U(t-T)]$ et $f_0(t) \sqsupset F_0(p)$, on obtient (voir 1.3.C exemple 2) :

$$F_0(p) = \frac{1+e^{-p\pi}}{1+p^2}$$

d'où si F est la transformée de Laplace de f :

$$\boxed{F(p) = \frac{1 + e^{-p\pi}}{(1 + p^2)(1 - e^{-p\pi})}}$$

Exemple 3

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 \quad si \quad t \in \left]-\infty, 0\right[\\ f(t) &= 1 \quad si \quad t \in [0, 1[\\ f(t) &= 2 \quad si \quad t \in [1, 2[\end{aligned}$$

et de façon plus générale, pour tout entier n strictement supérieur à 2,

$$f(t) = n \quad si \quad t \in [n - 1, n[$$

On peut montrer à priori que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ est convergente pour $p > 0$.

Admettons le et calculons la transformée de Laplace de f :

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = \sum_{k=1}^{+\infty} k\int_{k-1}^{k} e^{-pt}dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{p}\left(e^{-p(k-1)} - e^{-kp}\right)$$

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = \frac{e^p - 1}{p} \sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-kp}$$

En utilisant la formule donnant la somme des $(n + 1)$ premiers termes d'une suite géométrique, nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^{k=n} e^{-kp} = \frac{1 - e^{-(n+1)p}}{1 - e^{-p}}$$

En dérivant cette identité par rapport à p, on a :

$$-\sum_{k=0}^{k=n} ke^{-kp} = \frac{(1 - e^{-p})\left((n+1)e^{-(n+1)p}\right) - \left(1 - e^{-(n+1)p}\right)\left(e^{-p}\right)}{(1 - e^{-p})^2}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on aboutit à :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} ke^{-kp} = \sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-kp} = \frac{e^{-p}}{(1 - e^{-p})^2}$$

Finalement, en tenant compte du résultat trouvé plus haut :

$$\boxed{\mathcal{L}[f](p) = \frac{1}{p(1 - e^{-p})} \quad (p > 0)}$$