Intégrales généralisées

Laurence LAMOULIE

.
Année 2007-2008

Table des matières

1 Introduction et motivations

En première année, le cours sur le calcul intégral a été abordé. Toutefois, les intégrales ont été étudiées dans un cadre que l'on peut juger avec du recul relativement simple puisque, concrètement, les objets à intégrer étaient des fonctions continues sur leur domaine de définition et on se limitait à intégrer sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$ inclus dans l'ensemble de définition. Il faut avoir à l'esprit que **la théorie de l'intégration** a un champ d'applications plus vaste et **offre la possibilité de calculer des intégrales de fonctions qui ne sont pas nécessairement continues et ceci sur des domaines d'intégration pouvant être non bornés**. Dans les faits, vous avez déjà été confrontés au fait que le physicien pouvait représenter la solution d'un de ses problèmes par le biais d'une intégrale posée sur un domaine non borné. On fait référence ici à **la théorie des intégrales de Riemann**. Une fiche technique spécifique à cette théorie est donnée en complément de ce cours. Sa lecture doit être faite attentivement pour comprendre une bonne fois pour toutes le cheminement du raisonnement tenu dans cette théorie. Cette opération menée, vous allez vous rendre compte qu'il sera difficile de généraliser une intégrale parce que le domaine d'intégration est non borné. Quoiqu'il en soit, le premier travail avant de manipuler l'intégrale elle-même consistera à s'assurer que l'objet à intégrer vérifie une propriété nécessaire et minimaliste à savoir :

son caractère **localement intégrable.**

A cette fin, il est indispensable de connaître la définition suivante :

Définition : Soit I un intervalle qui n'est pas un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, *i.e.* I est de la forme

$$\boxed{[\alpha,\beta[,\ [\alpha,+\infty[,\ ]\alpha,+\infty[,\ ]\alpha,\beta[,\ ]\alpha,\beta]\,,\ ]-\infty,\beta],\ ]-\infty,\beta[,\ \mathbb{R}}$$

où

$$\boxed{-\infty<\alpha<\beta<+\infty.}$$

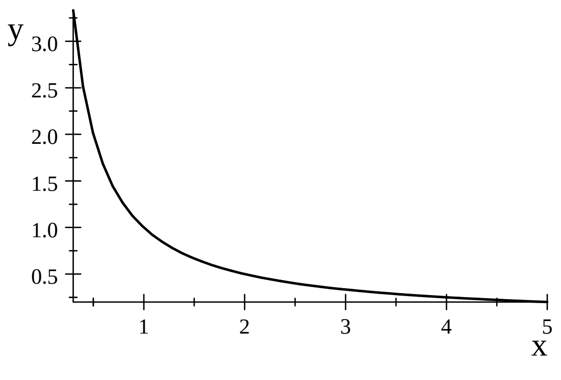
On dit que $f: I \to \mathbb{R}$ est **localement intégrable sur** I si f est **intégrable au sens de Riemann sur tout intervalle fermé borné inclus dans** I. ■

Concrètement, on dispose des deux informations primordiales suivantes :

Proposition :

- Si f est **continue sur** I alors f est **localement intégrable sur** I.
- Si f est **monotone sur** I alors f est **localement intégrable sur** I. ■

Exemple(s) Cas de la fonction f définie par :$f(x) = \frac{1}{x}$ à intégrer sur un intervalle d'extrémités a et b.



2 Notion de convergence et de divergence d'une intégrale généralisée

Sauf mention contraire dans l'énoncé, on opte pour les choix suivants :

• $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ avec $a < b$,
• les applications envisagées vont de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ et sont continues sur $[a, b[$.

2.1 Définitions

Définition : Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ **continue** (donc **localement intégrable sur** $[a, b[$).

• On dit que **l'intégrale généralisée** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **converge ou existe** si et seulement si l'application $F : \left| \begin{array}{l} [a, b[\to \mathbb{R} \\ X \mapsto \displaystyle\int_a^X f(x)\,dx \end{array} \right.$ admet une limite finie en b^-. Si c'est le cas on note :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{X \to b^-} \int_a^X f(x)\,dx.}$$

• On dit que **l'intégrale généralisée** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **diverge** si et seulement si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **ne converge pas**.

A noter une définition analogue pour $]a, b]$ au lieu de $[a, b[$ dans le cas où $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$ avec $a < b$. ■

Définition Dans le cas où l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge, on dit que la fonction f est **intégrable** ou **sommable** sur l'intervalle considéré.

Exemple(s) Etude des intégrales généralisées : $\displaystyle\int_0^b \frac{1}{x}dx$, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$, $\displaystyle\int_0^b \frac{1}{x^2}dx$, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$.

Bilan :

	$\int_0^b$	$\int_1^\infty$
$\frac{1}{x}$		
$\frac{1}{x^2}$		

Conclusion :

Remarque :

• En règle générale et plus précisément dans ce cours sur les intégrales généralisées, il faut toujours garder un esprit critique quant à la nature des objets que l'on manipule puisque la notation $\int_a^b f(x)\,dx$ peut désigner :

•• **l'intégrale généralisée en b qui peut a priori converger ou diverger,**

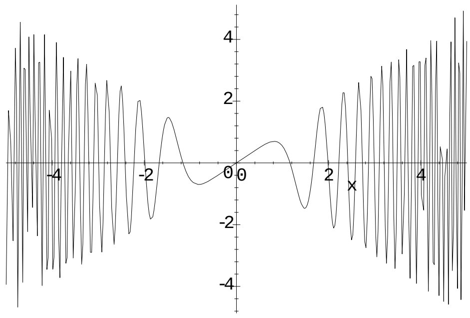
•• **un certain réel lorsque cette intégrale généralisée converge.**

Cette confusion est très regrettable mais elle est malheureusement passée dans l'usage. Ainsi, vous devez vous poser la question du cas de figure dans lequel vous êtes placés. Prudence...

• Dans le cas où $b=+\infty$, il n'y a pas de lien logique entre la convergence de $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ et l'existence d'une limite pour f en $+\infty$. En effet :

•• $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ diverge étant donné que $\lim\limits_{X\to+\infty}\int_1^X \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$ et $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

•• $\int_0^{+\infty} x\cos\left(x^3\right) dx$ converge et $x\cos\left(x^3\right)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.



Représentation graphique de $x\cos\left(x^3\right)$

■

Pour résumer, il faut garder à l'esprit que, pour une intégrale généralisée, il y a deux façons de diverger :

•**soit la limite est égale à** $\pm\infty$ (la divergence est dite de **première espèce**),

•**soit il n'y a pas de limite du tout** (la divergence est dite de **deuxième espèce**).

Proposition Intégrales faussement généralisées : Si $b\in\mathbb{R}$ ($b\neq+\infty$) et si $f:[a,b[\,\to\mathbb{R}$ admet une limite finie l en b^- alors $\int_a^b f(x)\,dx$ converge et en notant $\widetilde{f}:\left|\begin{array}{l}[a,b]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\begin{cases} f(x) & \text{si } x\in[a,b[\\ l \text{ si } x=b\end{cases}\end{array}\right.$ le prolongement de f par continuité sur $[a,b]$, on a :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \widetilde{f}(x)\,dx. \ \blacksquare}$$

Preuve : Puisque $\widetilde{f}$ est continue en b, $\widetilde{f}$ est bornée au voisinage de b. Il existe donc $b_0\in[a,b[$ et $M\in\mathbb{R}_+$ tels que :

$$\forall x\in[b_0,b] \qquad \left|\widetilde{f}(x)\right|\leq M$$

si bien que l'on peut écrire successivement pour tout X dans $[b_0,b[$:

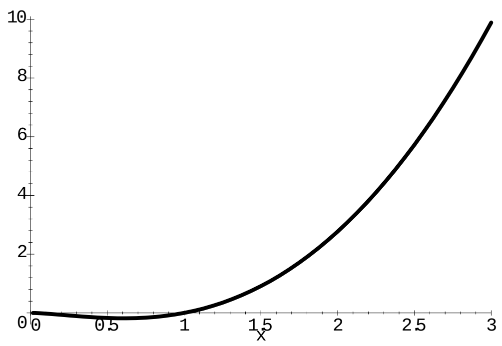
$$\left|\int_a^X f(x)\,dx - \int_a^b \widetilde{f}(x)\,dx\right| = \left|\int_a^X \widetilde{f}(x)\,dx - \int_a^b \widetilde{f}(x)\,dx\right| = \left|\int_X^b \widetilde{f}(x)\,dx\right| \leq \int_X^b \left|\widetilde{f}(x)\right| dx \leq (b-X)\,M$$

Puisque

$$(b - X)\, M \underset{X \to b^-}{\longrightarrow} 0,$$

on conclut bien que $\displaystyle\int_a^X f(x)\,dx \underset{X \to b^-}{\longrightarrow} \int_a^b \widetilde{f}(x)\,dx$. D'où le résultat. ▲

Exemple(s) $\displaystyle\int_0^2 x^2 \ln x dx$.



Proposition Changement de point de base : Soient $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue et $c \in [a, b[$. Les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ **sont de même nature** et **lorsqu'elles convergent**, on a :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \blacksquare}$$

Remarque : Pour être sûr de bien se comprendre, deux intégrales généralisées sont dites **de même nature si et seulement si elles sont simultanèment convergentes ou simultanèment divergentes.** Autrement dit, la phrase " $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ **sont de même nature"** **veut dire** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **converge si et seulement si** $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ **converge.** ■

Preuve :

• Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge alors puisque

$$\forall X \in [c, b[\qquad \int_c^X f(x)\,dx = \int_a^X f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx,$$

on déduit que $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ converge et que $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx$.

• Si $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ converge alors comme

$$\forall X \in [a, b[\qquad \int_a^X f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^X f(x)\,dx,$$

on déduit cette fois-ci que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge et que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. ▲

2.2 Propriétés algébriques

Proposition : Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $f,\ g\ :\ [a,b[\ \to \mathbb{R}$ **continues**. Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ convergent alors $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))\,dx$ converge et

$$\boxed{\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \blacksquare}$$

Preuve : On écrit tout d'abord

$$\int_a^X (\lambda f(x) + g(x))\,dx = \lambda \int_a^X f(x)\,dx + \int_a^X g(x)\,dx$$

puis

$$\lambda \int_a^X f(x)\,dx + \int_a^X g(x)\,dx \underset{X\to b^-}{\to} \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \blacktriangle$$

Remarque :
• On prendra garde de ne pas écrire

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

avant d'avoir établi la convergence des intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$. Si cette précaution n'est pas prise, on commet **une faute grave de raisonnement**. Dans les faits, si on commet cette erreur, on risque de décomposer la valeur d'une intégrale généralisée convergente en somme de valeurs de deux intégrales généralisées divergentes...Par exemple, l'écriture

$$\int_0^{+\infty} (1 + (-1))\,dx = \int_0^{+\infty} 1dx + \int_0^{+\infty} (-1)\,dx$$

est illicite car les deux dernières intégrales n'existent pas.

• Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ convergent, on ne peut pas conclure que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ converge. Par exemple, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ converge (pour information, il s'agit d'une intégrale généralisée en 0) car

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 2$$

et $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ diverge puisque

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx = -\ln\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0^+}{\to} +\infty. \blacksquare$$

2.3 Propriétés relatives à l'ordre

Proposition : Si

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \text{ converge}\\ f\geq 0\end{array}\right.}$$

alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.\ \blacksquare}$$

Preuve : La preuve est immédiate étant donné que

$$\forall X \in [a,b[\qquad \int_a^X f(x)\,dx \geq 0$$

et en passant à la limite lorsque X tend vers b^- le résultat attendu apparaît. ▲

Corollaire : Si

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \text{ et } \int_a^b g(x)\,dx \text{ convergent}\\ f\leq g\end{array}\right.}$$

alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.\ \blacksquare}$$

Preuve : Il suffit d'appliquer la proposition précédente à la fonction $g-f$. ▲

Proposition : Si

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l}f:[a,b[\to\mathbb{R} \text{ est } \textbf{continue},\\ f\geq 0,\\ \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \text{ converge},\\ \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0\end{array}\right.}$$

alors

$$\boxed{f=0.\ \blacksquare}$$

Preuve : Soit $c\in[a,b[$. Puisque $\int_a^b f(x)\,dx$ converge, $\int_c^b f(x)\,dx$ converge également et

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

On sait par ailleurs que $\int_a^c f(x)\,dx \geq 0$ et $\int_c^b f(x)\,dx \geq 0$ de sorte que

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx = 0.$$

D'où $\forall x\in[a,c] \quad f(x)=0$ et en particulier $f(c)=0$. Le choix de c étant quelconque, on obtient au final que f est identiquement nulle sur $[a,b[$. ▲

Remarque : Si

$$\boxed{\begin{cases} f : [a,b[\to \mathbb{R} \text{ est } \textbf{continue}, \\ \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,dx \text{ converge}, \\ \displaystyle\int_a^b f^2(x)\,dx = 0 \end{cases}}$$

alors

$$\boxed{f = 0. \blacksquare}$$

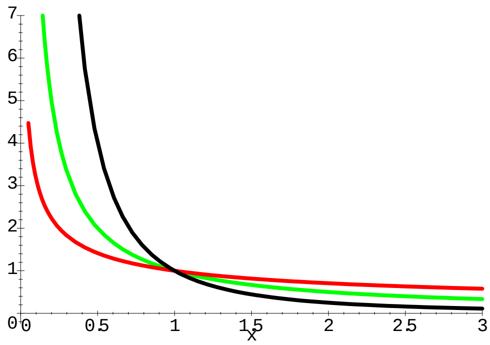
2.4 Exemples fondamentaux

Ces exemples sont à **apprendre par coeur**.

2.4.1 Exemple de Riemann en $+\infty$

Théorème : Pour tout α de $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge si et seulement si

$$\boxed{\alpha > 1. \blacksquare}$$



Représentations graphiques de $\dfrac{1}{x^2}, \dfrac{1}{x^1}, \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Preuve : On calcule pour tout X de $[1,+\infty[$ l'intégrale définie $\displaystyle\int_1^X \frac{1}{x^\alpha}dx$. Deux cas sont à distinguer :

• $\alpha \neq 1$

$$\int_1^X \frac{1}{x^\alpha}dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^X = \frac{X^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \frac{X^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1}.$$

•• si $\alpha > 1$ alors

$$\frac{X^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1} \underset{X\to+\infty}{\to} \frac{1}{\alpha-1}$$

donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{1}{\alpha-1}$.

•• si $\alpha < 1$ alors

$$\frac{X^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1} \underset{X\to+\infty}{\to} +\infty$$

donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ diverge.

• $\underline{\alpha = 1}$

$$\int_1^X \frac{1}{x}dx = \ln X \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ diverge. ▲

2.4.2 Exemple de Riemann en 0

Théorème : Pour tout α de $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge si et seulement si

$$\boxed{\alpha < 1. \blacksquare}$$

Preuve : On utilise ici le changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$. Il vient :

$$\forall \varepsilon \in]0,1] \qquad \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \int_1^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{u^{-\alpha+2}}du$$

et $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{u^{-\alpha+2}}du$ converge si et seulement si $-\alpha + 2 > 1$, *i.e.* $\alpha < 1$. ▲

L'utilisation du changement de variable $u = x - a$ permet de montrer le corollaire suivant qui généralise le précédent énoncé :

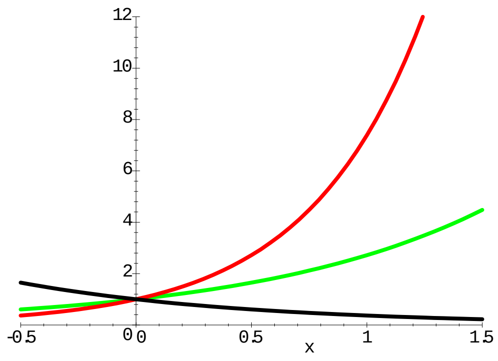
Corollaire : Pour tout (a, c, α) de $\mathbb{R}^3$ avec $a \neq c$, $\displaystyle\int_a^c \frac{dx}{|x-a|^\alpha}$ converge si et seulement si

$$\boxed{\alpha < 1. \blacksquare}$$

2.4.3 Exemple de l'exponentielle en $+\infty$

Théorème : Pour tout α de $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\alpha x}dx$ converge si et seulement si $\alpha < 0$ puisque :

$$\boxed{\forall X \in [0,+\infty[\qquad \int_0^X e^{\alpha x}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha X} - 1\right) \text{ si } \alpha \neq 0, \\ X \text{ si } \alpha = 0. \blacksquare \end{cases}}$$



Représentations graphiques de e^x, e^{2x}, e^{-x}

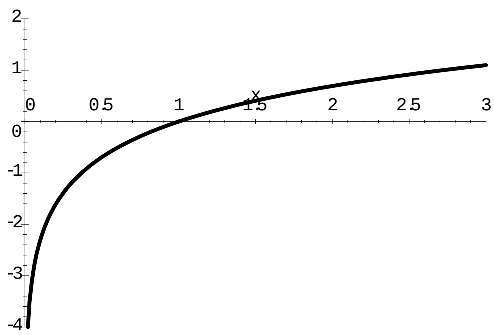
2.4.4 Exemple de la fonction logarithme népérien en 0

Théorème : On démontre que

$$\boxed{\int_0^1 \ln x dx \text{ converge}}$$

comme conséquence des deux propriétés suivantes :

- $\forall \varepsilon \in]0;1] \qquad \int_\varepsilon^1 \ln x dx = [x \ln x - x]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon,$
- $\varepsilon \ln \varepsilon \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} 0.$ ■



Représentation graphique de $\ln x$

3 Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}_+$

Lemme : Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue telle que $f \geq 0$. L'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,dx$ converge si et seulement si :

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}_+ \qquad \forall X \in [a,b[\qquad \int_a^X f(x)\,dx \leq M.} \ ■$$

Remarque Ce lemme signifie que l'intégrale est **uniformément bornée** (comme fonction de X). L'ordre des quantificateurs est essentiel puisque si on les intervertit, on obtient :

$$\forall X \in [a,b[\qquad \exists M_X \in \mathbb{R}_+ \qquad \int_a^X f(x)\,dx \leq M$$

cette proposition n'impose aucune condition, puisqu'elle est vraie même quand $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

Remarque : Si

$$\boxed{\begin{cases} f,g : [a,b[\to \mathbb{R} \text{ sont continues,} \\ 0 \leq f \leq g \\ \displaystyle\int_a^b g(x)\,dx \text{ converge} \end{cases}}$$

alors

$$\boxed{\forall X \in [a,b[\qquad \int_a^X f(x)\,dx \leq \int_a^X g(x)\,dx.}$$

et

$$\boxed{\forall X \in [a,b[\qquad \int_a^X f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx.} \blacksquare$$

Corollaire **Théorème de majoration** : Si

$$\boxed{\begin{cases} f,g : [a,b[\to \mathbb{R} \text{ sont continues,} \\ 0 \leq f \leq g \\ \displaystyle\int_a^b g(x)\,dx \text{ converge} \end{cases}}$$

alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \text{ converge. } \blacksquare}$$

Preuve : On utilise ici directement la remarque précédente :

$$\forall X \in [a,b[\qquad \int_a^X f(x)\,dx \leq \int_a^X g(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

et le lemme permet de conclure quant à la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. ▲

Remarque : On peut bien sûr adapter ce corollaire au cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}_-$. Avec du recul, la pratique conseille d'étudier plutôt les fonctions $-f$ et $-g$ lorsque $f \leq 0$ et $g \leq 0$ simultanèment. ■

Exercice : Etudier la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$.

Solution :

On sait que :

- $\forall x \in [1,+\infty[\qquad 0 \leq \dfrac{\sin^2 x}{x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$,
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge (intégrale généralisée de Riemann en $+\infty$ convergente car $2 > 1$)

si bien que le théorème de majoration assure la convergence de l'intégrale généralisée étudiée. ▲

Corollaire **Théorème d'équivalence** : Si

$$\boxed{\begin{cases} f,g : [a,b[\to \mathbb{R} \text{ sont continues,} \\ 0 \leq g \\ f \underset{b^-}{\sim} g \end{cases}}$$

alors les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ sont de même nature. ■

Remarque On peut affaiblir l'hypothèse de positivité de g, et supposer que g est de signe constant au voisinage de b. Si $g \leq 0$ on travaille avec $-g$ dans la démonstration suivante.

Preuve : Puisque $f \underset{b^-}{\sim} g$, il existe $c \in [a,b[$ tel que :

$$\forall x \in [c,b[\qquad |f(x) - g(x)| \leq \frac{1}{2} g(x)$$

et donc
$$\forall x \in [c, b[\qquad \frac{1}{2} g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2} g(x).$$
En particulier, $\forall x \in [c, b[\quad f(x) \geq 0$. Comme $\forall x \in [c, b[\quad 0 \leq \frac{1}{2} g(x) \leq f(x)$, la convergence de $\int_a^b f(x)\,dx$ entraîne celle de $\int_c^b g(x)\,dx$ et donc celle de $\int_a^b g(x)\,dx$. Enfin, comme $\forall x \in [c, b[\quad 0 \leq f(x) \leq \frac{3}{2} g(x)$, la convergence de $\int_a^b g(x)\,dx$ entraîne celle de $\int_c^b f(x)\,dx$ et donc celle de $\int_a^b f(x)\,dx$. ▲

Exercice : Déterminer la nature des deux intégrales suivantes :
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\left(\sqrt{x^2+x+1} - (x+\lambda)\right) dx$ suivant la valeur du paramètre λ.
- $\int_1^{+\infty} \left(e^6 - \left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}\right) dx$.

Solution :
• On introduit la fonction
$$f_\lambda(x) = \frac{1}{x}\left(\sqrt{x^2+x+1} - (x+\lambda)\right),$$
laquelle est continue sur $[1, +\infty[$. On manipule la quantité conjuguée de cette expression :
$$f_\lambda(x) = \frac{x^2+x+1-(x+\lambda)^2}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+(x+\lambda)\right)} = \frac{x^2+x+1-x^2-2\lambda x-\lambda^2}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+(x+\lambda)\right)} = \frac{(1-2\lambda)x+\left(1-\lambda^2\right)}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+(x+\lambda)\right)}.$$
On est ainsi amener à distinguer deux cas :

•• $\lambda \neq \frac{1}{2}$. Alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1-2\lambda}{2x}$ et comme $\frac{1-2\lambda}{2x}$ est de signe fixe lorsque $x \in [1, +\infty[$ et que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge, on conclut par le théorème d'équivalence que $\int_1^{+\infty} f_\lambda(x)\,dx$ diverge.

•• $\lambda = \frac{1}{2}$. Alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{8x^2}$ et comme $\begin{cases} \forall x \in [1, +\infty[\quad \frac{3}{8x^2} \geq 0, \\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge} \end{cases}$ on conclut que $\int_1^{+\infty} f_\lambda(x)\,dx$ converge.

En conclusion, l'intégrale généralisée à étudier converge si et seulement si $\lambda = \frac{1}{2}$.

• On utilise ici un développement limité lorsque x tend vers $+\infty$:
$$e^6 - \left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x} = e^6 - e^{2x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)} = e^6 - e^{2x\left(\frac{3}{x}-\frac{9}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} = e^6\left(1 - e^{-\frac{9}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{9e^6}{x}.$$
Puisque $\begin{cases} \forall x \in [1, +\infty[\quad \frac{9e^6}{x} \geq 0, \\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx \text{ diverge} \end{cases}$, on conclut par le théorème d'équivalence que l'intégrale proposée diverge. ▲

Proposition Règle $x^\alpha f(x)$ en $+\infty$: Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que $f \geq 0$.

- S'il existe $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $x^\alpha f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.
- S'il existe $\alpha \in]-\infty, 1]$ tel que $x^\alpha f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$ alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge. ■

Preuve :
• Il existe $c \in [a, +\infty[$ tel que :

$$\forall x \in [c, +\infty[\qquad 0 \leq x^\alpha f(x) \leq 1$$

si bien que

$$\forall x \in [c, +\infty[\qquad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^\alpha}.$$

On conclut en appliquant le théorème de majoration et l'exemple de Riemann en $+\infty$.
• Il existe $c \in [a, +\infty[$ tel que :

$$\forall x \in [c, +\infty[\qquad x^\alpha f(x) \geq 1$$

et par conséquent

$$\forall x \in [c, +\infty[\qquad f(x) \geq \frac{1}{x^\alpha}.$$

On obtient le résultat escompté en appliquant le théorème de majoration par contraposée et l'exemple de Riemann en $+\infty$. ▲

Exercice : Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt[3]{x}+\sin x} dx$.
Solution :
La fonction sous le signe intégral est clairement ≥ 0 et, pour tout α de $\mathbb{R}$,

$$x^\alpha e^{-\sqrt[3]{x}+\sin x} = \exp\left(\alpha \ln x - \sqrt[3]{x} + \sin x\right) \underset{x\to+\infty}{\to} 0.$$

En particulier, $x^2 e^{-\sqrt[3]{x}+\sin x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ et $2 > 1$ donc

$$\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt[3]{x}+\sin x} dx \text{ converge. ▲}$$

Il faut retenir qu'on peut essayer d'appliquer la règle $x^\alpha f(x)$ lorsque $f(x)$ n'admet apparemment pas d'équivalent simple quand x tend vers $+\infty$.

Remarque : Pour résumer, l'application de la règle $x^\alpha f(x)$ revient à comparer $f(x)$ et $\dfrac{1}{x^\alpha}$ pour une valeur du paramètre α à choisir convenablement. Dans les faits, certaines fonctions f échappent à cette comparaison et la règle $x^\alpha f(x)$ ne permet pas de déterminer la nature de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$. Par exemple, pour l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$, on a :

$$\begin{cases} \forall \alpha \in]1, +\infty[\qquad x^\alpha f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty, \\ \forall \alpha \in]-\infty, 1] \qquad x^\alpha f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \end{cases}$$

et donc la règle $x^\alpha f(x)$ ne s'applique pas. ■

Proposition Règle $x^\alpha f(x)$ en 0 : Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f :]0, a] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \geq 0$.

- S'il existe $\alpha \in]-\infty, 1[$ tel que $x^\alpha f(x) \underset{x\to 0^+}{\to} 0$ alors $\displaystyle\int_0^a f(x)\, dx$ converge.
- S'il existe $\alpha \in [1, +\infty[$ tel que $x^\alpha f(x) \underset{x\to 0^+}{\to} +\infty$ alors $\displaystyle\int_0^a f(x)\, dx$ diverge. ■

Preuve : On se ramène à la proposition précédente par le changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$. ▲

3.1 Exemple de Bertrand en $+\infty$

Dans ce paragraphe, on étudie la nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx$ lorsque $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On établit précisément :

Proposition :

$$\boxed{\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx \text{ converge} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \alpha > 1, \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1. \blacksquare \end{array} \right.}$$

Preuve :

• Si $\alpha > 1$ en notant $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2}$, on a :

$$x^\gamma \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = x^{\frac{1-\alpha}{2}} (\ln x)^{-\beta} \underset{x \to +\infty}{\to} 0$$

et donc l'intégrale généralisée converge.

• Si $\alpha < 1$ en notant $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2}$, on a :

$$x^\gamma \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = x^{\frac{1-\alpha}{2}} (\ln x)^{-\beta} \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty$$

et l'on constate alors la divergence de l'intégrale généralisée.

• Si $\alpha = 1$, on effectue le changement de variable $u = \ln x$:

$$\forall X \in [2, +\infty[\qquad \int_2^X \frac{1}{x (\ln x)^\beta} dx = \int_{\ln 2}^{\ln X} \frac{1}{u^\beta} du.$$

Donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x (\ln x)^\beta} dx$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{u^\beta} du$ converge, *i.e.* si et seulement si $\beta > 1$.

D'où le résultat annoncé. ▲

3.2 Exemple de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(x) e^{\alpha x} dx$

Proposition : Pour tout α de $\mathbb{R}_-^*$ et tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale généralisée

$$\boxed{\int_0^{+\infty} P(x) e^{\alpha x} dx \text{ converge}}$$

puisque P est de signe fixe au voisinage de $+\infty$ et que $x^2 P(x) e^{\alpha x} \underset{x \to +\infty}{\to} 0$. ■

4 Convergence absolue

4.1 Généralités

Définition : On dit que $\int_a^b f(x)\,dx$ **converge absolument** si et seulement si

$$\boxed{\int_a^b |f(x)|\,dx \text{ converge. } \blacksquare}$$

Théorème : Si $\int_a^b f(x)\,dx$ converge absolument alors $\int_a^b f(x)\,dx$ converge et

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx. \ \blacksquare}$$

Preuve :

• Supposons que $\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge. Comme

$$0 \leq |f| - f \leq 2|f|,$$

le théorème de majoration montre alors que $\int_a^b (|f(x)| - f(x))\,dx$ converge. Enfin, puisque l'on dispose de l'égalité $f = |f| - (|f| - f)$, on conclut que $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

• De plus, puisque $-|f| \leq f \leq |f|$ et que les trois intégrales généralisées convergent, on a :

$$\int_a^b -|f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

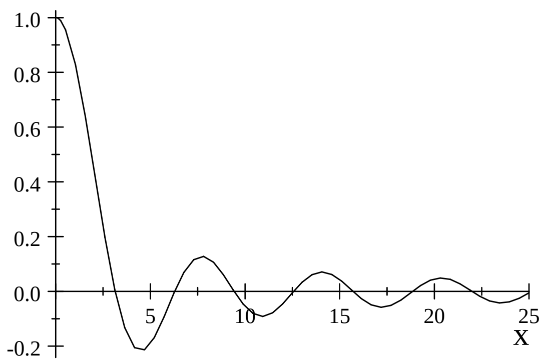
i.e.

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx. \ \blacktriangle$$

Remarque : La réciproque de ce théorème est fausse : il existe des intégrales généralisées convergentes et non absolument convergentes. Elles sont alors dites **semi-convergentes**. ■

L'exercice suivant illustre directement cette remarque :

Exercice : Etudier la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.



Représentation graphique de $\frac{\sin x}{x}$

Solution :
• A l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall X \in [1, +\infty[\qquad \int_1^X \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos X}{X} + \cos 1 - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Puisque

$$\forall x \in [1, +\infty[\qquad \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

et que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx$ converge par le biais du théorème de majoration et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ converge. On conclut que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge et de plus $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$.

• $\forall x \in [1, +\infty[\qquad \left| \dfrac{\sin x}{x} \right| \geq \dfrac{\sin^2 x}{x} = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{\cos(2x)}{2x}$. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2x} dx$ converge et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$ diverge. Il s'ensuit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ diverge et donc par le théorème de majoration $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ diverge. ▲

Théorème Inégalité de Cauchy-Schwarz pour des intégrales généralisées : Si $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_a^b g^2(x)\, dx$ convergent alors $\displaystyle\int_a^b fg(x)\, dx$ converge absolument (et donc converge) et de plus :

$$\boxed{\left(\int_a^b fg(x)\, dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\, dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)\, dx \right). \ \blacksquare}$$

Preuve :
• En développant $(|f| - |g|)^2 \geq 0$, on obtient :

$$0 \leq |fg| \leq \frac{1}{2}\left(f^2 + g^2\right),$$

ce qui montre que $\displaystyle\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx$ converge.
• D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales, on a :

$$\forall X \in [a, b[\qquad \left(\int_a^X fg(x)\, dx \right)^2 \leq \left(\int_a^X f^2(x)\, dx \right) \left(\int_a^X g^2(x)\, dx \right).$$

On obtient l'inégalité souhaitée en passant à la limite lorsque X tend vers b^-. ▲

Etude du cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour des intégrales généralisées de fonctions continues : Soient f, $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ continues telles que $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_a^b g^2(x)\, dx$ convergent (donc $\displaystyle\int_a^b fg(x)\, dx$ converge). Pour que

$$\boxed{\left(\int_a^b fg(x)\, dx \right)^2 = \left(\int_a^b f^2(x)\, dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)\, dx \right),}$$

il faut et il suffit que (f, g) soit lié, *i.e.* il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ tel que :

$$\boxed{\alpha f + \beta g = 0. \ \blacksquare}$$

4.2 Règle d'Abel

On a vu que si l'intégrale n'est pas absolument convergente, on ne peut rien dire sur la nature de l'intégrale elle-même. Dans le cas où on ne sait pas calculer de façon simple l'intégrale, il peut être utile d'utiliser la règle dite d'Abel.

Théorème Règle d'Abel : Soient a et b deux réels tels que $-\infty < a < b \leq +\infty$. Soit f une fonction décroissante sur $[a, b[$, à valeurs positives. Soit g une fonction localement intégrable sur $[a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = 0 \text{ et } x \mapsto G(x) = \int_a^x g(t)\ dt \text{ est bornée sur } [a, b[.$$

Alors,

$$\int_a^b f(x)\ g(x)\ dx \text{ est convergente.}$$

Preuve On applique la deuxième formule de la moyenne dont on rappelle l'énoncé.

Deuxième formule de la moyenne

Soient c et d deux réels tels que $-\infty < c < d < +\infty$. Soit $f : [c, d] \to [0, +\infty[$ décroissante (et donc Riemann-intégrable). Soit $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ Riemann-intégrable. Alors, il existe $\xi \in [c, d]$ tel que

$$\int_c^d f(x)\ g(x)\ dx = f(c) \int_c^\xi g(x)\ dx.$$

Dans le cadre de la règle d'Abel, on considère un intervalle quelconque fermé borné $[c, d] \subset [a, b[$ et les fonctions f et g vérifient bien les hypothèses de la deuxième formule de la moyenne. Il existe donc $\xi \in [c, d] \subset [a, b[$ tel que

$$\int_c^d f(x)\ g(x)\ dx = f(c) \int_c^\xi g(x)\ dx.$$

Comme de plus, G est bornée sur $[a, b[$, il existe $M > 0$ tel que pour tout c et tout $\xi \in [c, d]$,

$$\left| \int_c^\xi g(x)\ dx \right| \leq M.$$

On en déduit donc que

$$\left| \int_c^d f(x)\ g(x)\ dx \right| = |f(c)| \left| \int_c^\xi g(x)\ dx \right| = f(c) \left| \int_c^\xi g(x)\ dx \right| \leq M\ f(c).$$

De plus, comme $\lim_{x \to b^-} f(x) = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in [a, b[$ tel que pour tout $c \in [\alpha, b[$,

$$0 \leq f(c) \leq \frac{\varepsilon}{M}.$$

On prouve donc qu'il existe $\alpha \in [a, b[$ tel que pour tout $c \in [\alpha, b[$,

$$\left| \int_c^d f(x)\ g(x)\ dx \right| \leq \varepsilon.$$

On vérifie donc le critère de Cauchy, ce qui prouve que l'intégrale converge, d'après 7.1.▲

5 Procédés de transformation d'intégrales généralisées

5.1 Changement de variable

Proposition : Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ tel que $\alpha < \beta$, $\varphi : [\alpha,\beta[\to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f : \varphi([\alpha,\beta[) \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^0$. On suppose :

$$\boxed{\left| \begin{array}{l} \varphi(X) \underset{X \to \beta^-}{\longrightarrow} b, \\ \displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{b} f(u)\,du \text{ converge.} \end{array} \right.}$$

Alors $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$ converge et :

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{b} f(u)\,du. \ \blacksquare}$$

Preuve : On a pour tout X de $[\alpha,\beta[$:

$$\int_{\alpha}^{X} f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(X)} f(u)\,du.$$

Comme $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{b} f(u)\,du$ converge et que $\varphi(X) \underset{X \to \beta^-}{\longrightarrow} b$, on déduit (composition des limites)

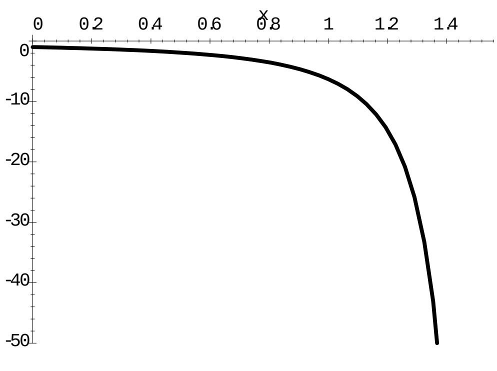
$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(X)} f(u)\,du \underset{X \to \beta^-}{\longrightarrow} \int_{\varphi(\alpha)}^{b} f(u)\,du.$$

D'où la conclusion annoncée. ▲

Proposition : Sous les hypothèses de la proposition précédente et si, de plus, φ est bijective de $[\alpha,\beta[$ dans $[\varphi(\alpha), b[$ alors les deux intégrales généralisées $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{b} f(u)\,du$ sont de même nature et si elles convergent elles ont la même valeur. ■

Exercice : Déterminer la nature des intégrales généralisées

$$I = \int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x - 1} \quad \text{et} \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}(2x)}\,dx.$$



Représentation graphique de $\dfrac{1}{\sin x - 1}$

Solution :

• $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x - 1}$:

Le changement de variable $t = \tan \dfrac{x}{2}$ montre que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x - 1} = \int_0^1 \frac{\dfrac{2}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2} - 1} dt = \int_0^1 \frac{-2}{t^2 - 2t + 1} dt$$

L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{-2}{t^2-2t+1} dt = \int_0^1 \frac{-2}{(t-1)^2} dt$ et on a par définition $\displaystyle\int_0^1 \frac{-2}{(t-1)^2} dt = 2 \lim_{x \to 1^-} \left[\frac{1}{t-1}\right]_x^1$. La limite n'existe pas et on peut donc en conclure que l'intégrale I est divergente.

• $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}(2x)} dx$:

$\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}(2x)} \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{-x} > 0$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}(2x)} dx \text{ converge}$$

De plus, par le changement de variable $u = \operatorname{sh} x$, l'intégrale généralisée obtenue converge et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}(2x)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+2u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\arctan\left(u\sqrt{2}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \blacktriangle$$

5.2 Intégration par parties

Proposition : Soient u, $v : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux applications de classe $\mathcal{C}^1$. Si, parmi les trois objets $\displaystyle\int_a^b u'v dx$, $[uv]_a^b$, $\displaystyle\int_a^b uv' dx$, deux au moins existent alors le troisième existe et on dispose de l'égalité suivante :

$$\boxed{\int_a^b u'v dx = [uv]_a^b - \int_a^b uv' dx.}$$

Ici, $[uv]_a^b$ désigne sous réserve d'existence bien sûr la quantité $\lim\limits_{b^-} (uv) - (uv)(a)$. $\blacksquare$

Preuve : Par intégration par parties, on sait que

$$\forall X \in [a, b[\qquad \int_a^X u'v dx = [uv]_a^X - \int_a^X uv' dx$$

puis on obtient le résultat par passage à la limite sur X vers b^-. $\blacktriangle$

Remarque ou plutôt conseil : Dans un premier temps, **on conseille fortement à l'étudiant d'écrire l'égalité d'intégration par parties avec une borne X puis de voir si les différents termes admettent une limite lorsque X tend vers b^-**. L'expérience montre qu'une application inattentive de la proposition peut aboutir à la manipulation d'un crochet et d'une deuxième intégrale généralisée divergents!!! $\blacksquare$

Exercice : On s'intéresse ici à l'étude de l'intégrale généralisée

$$\boxed{\int_0^1 -e^{-x}\ln x dx.}$$

Solution : Au premier abord, on remarque que l'on est amené à manipuler une intégrale généralisée en 0, convergente puisque :

$$x^{\frac{1}{2}}\left(-e^{-x}\ln x\right) \underset{x\to 0^+}{\to} 0.$$

Une intégration par parties **incorrecte** conduirait à :

$$\int_0^1 -e^{-x}\ln x dx = \left[e^{-x}\ln x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}dx,$$

ce qui dans le cas présent n'a pas de sens puisque $[e^{-x}\ln x]_0^1$ n'existe pas et que $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}dx$ diverge. Autrement, par inattention, on est arrivé à écrire l'absurdité suivante :

$$\int_0^1 -e^{-x}\ln x dx = (+\infty) - (+\infty)!!!!!!!!$$

Dans les faits, il aurait fallu procéder de la sorte :

- $\forall \varepsilon \in]0,1]$

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 -e^{-x}\ln x dx &= \left[e^{-x}\ln x\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{e^{-x}}{x}dx = -e^{-\varepsilon}\ln\varepsilon - \int_\varepsilon^1 \frac{e^{-x}-1}{x}dx - \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x},\\ &= \left(1-e^{-\varepsilon}\right)\ln\varepsilon - \int_\varepsilon^1 \frac{e^{-x}-1}{x}dx.\end{aligned}$$

- $(1-e^{-\varepsilon})\ln\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0^+}{\sim} \varepsilon\ln\varepsilon.$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}-1}{x}dx$ converge puisque $\dfrac{e^{-x}-1}{x} \underset{x\to 0^+}{\to} -1$ (fausse intégrale généralisée).

Donc $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\ln x dx = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}dx$. On remarquera que dans le calcul précédent l'introduction du terme $\dfrac{1}{x}$ revient à choisir dans l'intégration par parties non pas $x \mapsto e^{-x}$ comme primitive de $x \mapsto e^{-x}$ mais $x \mapsto (e^{-x}-1)$. ▲

6 Intégrales doublement généralisées

Soient $(a,b) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2$ tel que $a < b$ et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue. Pour tout (c,d) de $]a,b[^2$:

- les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^d f(x)\,dx$ sont de même nature,
- les intégrales généralisées $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_d^b f(x)\,dx$ sont de même nature.

On peut alors énoncer la définition suivante :

Définition : Soient $(a,b) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2$ tel que $a < b$ et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue. On dit que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **converge** si et seulement s'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ convergent (cette propriété ne dépendant pas du choix du point c). Si c'est le cas, le réel

$$\boxed{\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

ne dépend pas de c et est appelé intégrale généralisée de f sur $]a,b[$ et on note $\int_a^b f(x)\,dx$. On dit que $\int_a^b f(x)\,dx$ **diverge** si et seulement si $\int_a^b f(x)\,dx$ ne converge pas, *i.e.* il existe $c \in\,]a,b[$ tel que $\int_a^c f(x)\,dx$ diverge ou $\int_c^b f(x)\,dx$ diverge. (le "ou" est inclusif, c'est à dire que si les deux intégrales divergent, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge). ■

Exercice : Déterminer la nature des intégrales doublement généralisées suivantes :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3+1}dx \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}dx.}$$

Solution :

• L'application $f : \left| \begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^3+1} \end{array} \right.$ est continue. De plus,

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln x \leq 0 \text{ et } \int_0^1 \ln x dx \text{ converge donc } \int_0^1 f(x)\,dx \text{ converge.}$$

Parallèlement,

$$x^2 f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ donc } \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge}$$

et finalement $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3+1}dx$ converge.

• $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ est continue sur $]-\infty,+\infty[$. Egalement,

$$\frac{x}{x^2+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x} \geq 0 \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx \text{ diverge,}$$

ce qui induit $\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}dx$ diverge. Il est inutile d'examiner la convergence pour la borne $-\infty$. D'après la définition, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}dx$ diverge. On aura noté préalablement que :

$$\forall X \in \mathbb{R}_+ \qquad \int_{-X}^{X} \frac{x}{x^2+1}dx = 0$$

comme conséquence du caractère impaire de la fonction $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$. ▲

Remarque :

• Avec les notations prises dans la définition, l'intégrale doublement généralisée $\int_a^b f(x)\,dx$ converge si et seulement si la fonction à deux variables $F : \left| \begin{array}{l}]a,b[^2 \to \mathbb{R} \\ (X,Y) \mapsto \displaystyle\int_X^Y f(x)\,dx \end{array} \right.$ admet une limite finie lorsque le couple (X,Y) tend vers (a,b) dans $\left(\overline{\mathbb{R}}\right)^2$.

• Si $b \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et si $f :]-b,b[\to \mathbb{R}$ est continue et paire ou impaire alors les intégrales doublement généralisée $\int_{-b}^b f(x)\,dx$ et généralisée $\int_0^b f(x)\,dx$ sont de même nature (pour cela utiliser le changement de variable $u = -x$ pour voir que $\int_{-b}^{0} f(x)\,dx$ et $\int_{0}^{b} f(x)\,dx$ sont de même nature).

Exemple : $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ est de même nature que $\int_{0}^{\infty} xdx$ puisque la fonction $x \mapsto x$ est impaire. Cela n'entraîne pas pour autant que l'intégrale soit convergente : en effet ici $\int_{0}^{\infty} xdx$ est divergente. Il ne faut donc pas conclure hâtivement que $\int_{-\infty}^{\infty} xdx$ est nulle sous prétexte que l'on intègre une fonction impaire sur un domaine symétrique par rapport à 0.

• Après avoir montré la convergence d'une intégrale doublement généralisée, il peut être intéressant de lier les deux bornes, *i.e.* d'effectuer un changement de variable qui échange les deux bornes.

• Il ne faut pas confondre ladouble généralisation avec le fait que $\int_{a}^{b} f(x)\,dx + \int_{a}^{b} g(x)\,dx$ n'a pas un comportement connu quand les deux intégrales divergent. ■

Exercice : Déterminer la nature et la valeur de $\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}dx$.

Solution :

• $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2+1}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

• $\frac{\ln x}{x^2+1} \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln x \leq 0$ et $\int_{0}^{1} \ln x dx$ converge donc $\int_{0}^{1} \frac{\ln x}{x^2+1}dx$ converge.

• $x^{3/2}\frac{\ln x}{x^2+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^{1/2}} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ donc $\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}dx$ converge.

Au final, $\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}dx$ converge.

• Par le changement de variable $u = \frac{1}{x}$,

$$\forall X \in \left]0, +\infty\right[\qquad \int_{X}^{\frac{1}{X}} \frac{\ln x}{x^2+1}dx = \int_{\frac{1}{X}}^{X} \frac{-\ln u}{\frac{1}{u^2}+1}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = -\int_{X}^{\frac{1}{X}} \frac{\ln u}{1+u^2}du$$

d'où

$$\forall X \in \left]0, +\infty\right[\qquad \int_{X}^{\frac{1}{X}} \frac{\ln x}{x^2+1}dx = 0$$

et donc en passant à la limite lorsque X tend vers 0^+ :

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}dx = 0. \blacktriangle$$

Remarque : On prendra garde à ne pas lier les bornes pour montrer la convergence d'une intégrale généralisée; par exemple :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xdx \text{ diverge bien que } \forall X \in [0, +\infty[\qquad \int_{-X}^{X} xdx = 0.$$

Il est par contre licite de montrer dans un premier temps la convergence, et d'utiliser **ensuite** une limite où les bornes sont liées pour calculer la valeur (c'est la méthode utilisée dans l'exemple ci-dessus).■

7 Exercices d'application

Exercice : Etudier l'intégrabilité des applications suivantes pour lesquelles on donne $f(x)$ et l'intervalle :

- $x+2-\sqrt{x^2+4x+1}$ $\quad [0,+\infty[$,
- $\dfrac{1}{\arccos(1-x)}$ $\quad]0,1]$,
- $e^{-\sqrt{x^2-x}}$ $\quad [1,+\infty[$,
- $(\ln x)^{-\ln x}$ $\quad [2,+\infty[$,
- $x^{-\frac{x}{x+1}}$ $\quad [1,+\infty[$,
- $\dfrac{1}{1+|\sin x|}$ $\quad [0,+\infty[$.

Solution :

• $x+2-\sqrt{x^2+4x+1}$ $\quad [0,+\infty[$:

L'application $x \mapsto x+2-\sqrt{x^2+4x+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et positive car :

$$x+2-\sqrt{x^2+4x+1} = \frac{(x+2)^2-\left(x^2+4x+1\right)}{x+2+\sqrt{x^2+4x+1}} = \frac{3}{x+2+\sqrt{x^2+4x+1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2x}.$$

Comme $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$ (cf. exemple de Riemann en $+\infty$), d'après le théorème d'équivalence, f n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$ et donc f n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$.

• $\dfrac{1}{\arccos(1-x)}$ $\quad]0,1]$:

L'application $x \mapsto \dfrac{1}{\arccos(1-x)}$ est continue sur $]0,1]$, ≥ 0 et puisque $\arccos(1-x) \underset{x\to 0^+}{\to} 0$:

$$\arccos(1-x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \sin(\arccos(1-x)) = \sqrt{1-(1-x)^2} = \sqrt{2x-x^2} \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{2x}.$$

Etant donné que $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$est intégrable sur $]0,1]$ (cf. exemple de Riemann en 0), d'après le théorème d'équivalence, f est intégrable sur $]0,1]$.

• $e^{-\sqrt{x^2-x}}$ $\quad [1,+\infty[$:

L'application $x \mapsto e^{-\sqrt{x^2-x}}$ est continue sur $[1,+\infty[$, ≥ 0 et

$$x^2 e^{-\sqrt{x^2-x}} = e^{2\ln x-\sqrt{x^2-x}} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

par prépondérance de $x \mapsto \sqrt{x^2-x}$ devant $x \mapsto \ln x$ au voisinage de $+\infty$ et donc (cf. règle $x^\alpha f(x)$ en $+\infty$), f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

• $(\ln x)^{-\ln x}$ $\quad [2,+\infty[$:

L'application $x \mapsto (\ln x)^{-\ln x}$ est continue sur $[2,+\infty[$, ≥ 0 et

$$x^2(\ln x)^{-\ln x} = \exp(2\ln x - \ln x \ln(\ln x)) = \exp(\ln x(2-\ln(\ln x))) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

et donc (cf. règle $x^\alpha f(x)$ en $+\infty$), f est intégrable sur $[2,+\infty[$.

• $x^{-\frac{x}{x+1}}$ $\quad [1,+\infty[$:

L'application $x \mapsto x^{-\dfrac{x}{x+1}}$ est continue sur $[1,+\infty[\,, \geq 0$ et

$$f(x) = \exp\left(-\frac{x}{x+1}\ln x\right) = \exp\left(-\ln x + \frac{\ln x}{x+1}\right) = \frac{1}{x}\exp\left(\frac{\ln x}{x+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Puisque $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$ (cf. exemple de Riemann en $+\infty$), d'après le théorème d'équivalence, f n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.

- $\dfrac{1}{1+|\sin x|}$ $\qquad [0,+\infty[$:

L'application $x \mapsto \dfrac{1}{1+|\sin x|}$ est continue sur $[0,+\infty[\,, \geq 0$ et $f(x) \geq \dfrac{1}{2}$ donc f n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$. ▲

<u>Exercice</u> Fonction Γ d'Euler réelle :
a) Déterminer l'ensemble des réels α tels que $t \mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ soit intégrable sur $]0,+\infty[$.
Pour $\alpha \in]0,+\infty[$, on note :

$$\boxed{\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt.}$$

b) Etablir :

$$\boxed{\forall \alpha \in]0,+\infty[\qquad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha).}$$

c) En déduire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \Gamma(n) = (n-1)!.}$$

<u>Solution :</u>
a) Pour tout α de $\mathbb{R}$, l'application $f_\alpha :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est continue sur $]0,+\infty[\,, \geq 0$,

$$f_\alpha(t) \underset{t\to0^+}{\sim} t^{\alpha-1}$$

et

$$t^2 f_\alpha(t) = t^{\alpha+1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$$

donc f_α est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $\alpha - 1 > -1$, soit $\alpha > 0$.
b) Pour tout (ε, X) de $]0,+\infty[^2$, on par le biais d'une intégration par parties l'égalité suivante :

$$\int_\varepsilon^X t^{\alpha-1}e^{-t}dt = \frac{1}{\alpha}\left(X^\alpha e^{-X} - \varepsilon^\alpha e^{-\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha}\int_\varepsilon^X t^\alpha e^{-t}dt.$$

D'où en faisant tendre ε vers 0^+ et X vers $+\infty$:

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha+1).$$

Ainsi,

$$\forall \alpha \in]0,+\infty[\qquad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

c) On fait ici un raisonnement par récurrence. On définit à cette fin l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_n$ suivante :

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

La propriété est immédiate pour $n = 1$ car :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \left[e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 = 0!.$$

Supposons l'hypothèse vraie au rang n. On a alors :

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n((n-1)!) = n! = ((n+1)-1)!.$$

On conclut que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \Gamma(n) = (n-1)!. \blacktriangle$$

FIN DU PREMIER CHAPITRE