Développements limités

I désigne un intervalle non singulier et n un entier naturel.
Les fonctions considérées ici sont à valeurs réelles ou complexes et sont présumées continues.

I. Développements limités

Soit a un point de I ou une extrémité finie de I et $\mathcal{D} = I$ ou $\mathcal{D} = I \setminus \{a\}$.

1°) Définition

Déf : On dit que $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ admet un développement limité à l'ordre n en a ($DL_n(a)$) ssi $\exists a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$ au voisinage de a.
La fonction polynomiale $x \mapsto a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n$ est alors appelée partie régulière du $DL_n(a)$ de f en a.

Prop : Si f admet un $DL_n(a)$ de la forme $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$
alors, pour tout $m \leq n$, f admet un $DL_m(a)$ de la forme :
$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_m(x-a)^m + o((x-a)^m)$.

2°) Unicité

Théorème : (Unicité du DL)
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ avec $\mathcal{D} = I$ ou $\mathcal{D} = I \setminus \{a\}$.
Si f admet un $DL_n(a)$ alors celui-ci est unique.

Cor : Supposons I symétrique par rapport à 0 et $\mathcal{D} = I$ ou $\mathcal{D} = I \setminus \{0\}$.
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ admettant un $DL_n(0)$.
Si f est une fonction paire (resp. impaire) alors la partie régulière de f ne contient que des termes d'exposants pairs (resp. impairs).

3°) Existence

Théorème de Taylor-Young
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$.
Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ alors f admet un $DL_n(a)$ de la forme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Cor : Si f est $\mathcal{C}^\infty$ sur I alors f admet un $DL_n(a)$ en tout $a \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4°) DL de référence

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n).$$

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + o(x^n) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n).$$

Ainsi $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$.

$$\mathrm{e}^{\lambda x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} x^k + o(x^n)$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n+1})=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n+1})$$

Ainsi $\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$.

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}+o(x^{2n+1})=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$$

Ainsi $\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$.

$$\operatorname{ch} x=1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n+1})=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh} x=x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+2})=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}+o(x^{2n+2})$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+o(x^n)=x-\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha.x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

Pour $\alpha=1/2$ $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$ et $\alpha=-1/2$, on obtient : $\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\mathrm{o}(x^2)$.

II. Détermination de développements limités

1°) Positionnement du problème en 0

Pour déterminer un $DL_n(a)$ d'une fonction $x\mapsto f(x)$, on relocalise le problème en 0 via le changement de variable $x=a+h$ ($h=x-a$). On détermine alors un $DL_n(0)$ de $h\mapsto f(a+h)$ puis on forme le $DL_n(a)$ voulu en remplaçant h par $x-a$.

2°) DL d'un produit

Supposons qu'au voisinage de 0 on ait :

$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+o(x^n)$ et $g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+o(x^n)$.

On a $f(x)g(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+\cdots+(a_0b_n+...+a_nb_0)x^n+o(x^n)$

ce qui détermine un $DL_n(0)$ de $x\mapsto f(x)g(x)$.

3°) DL d'une composée.

Supposons $f(x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$ et qu'au voisinage de 0 : $g(u)=a_0+a_1u+\cdots+a_nu^n+\underbrace{o(u^n)}_{u^n\varepsilon(u)}$ avec $\varepsilon\underset{0}{\longrightarrow}0$.

On peut écrire :

$g(f(x))=a_0+a_1f(x)+\cdots+a_n(f(x))^n+(f(x))^n\varepsilon(f(x))$ avec $\varepsilon(f(x))\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$ ce qui permet d'écrire :

$g(f(x))=a_0+a_1f(x)+\cdots+a_n(f(x))^n+o((f(x))^n)$.

Ainsi on a pu substituer $f(x)$ à u dans le $DL_n(0)$ de $g(u)$. Ceci était possible car $f(x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$.

On peut alors à partir d'un $DL_n(0)$ de f , $f(x)=\alpha_1x+\cdots+\alpha_nx^n+o(x^n)$, former un $DL_n(0)$ de $g(f(x))$ car $f(x)=O(x)$ permet d'écrire $o((f(x))^n)\subset_{>}o(x^n)$.

4°) DL d'un inverse

Supposons : $f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n+o(x^n)$ avec $a_0\neq0$ au voisinage de 0 .

On a $\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{a_0}.\frac{1}{1+\left(\frac{a_1}{a_0}x+...+\frac{a_n}{a_0}x^n+o(x^n)\right)}=\frac{1}{a_0}.\frac{1}{1+u}$ ce qui permet de former un $DL_n(0)$ de $\frac{1}{f(x)}$.

5°) Intégration de DL

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable et $a \in I$. Si f' admet un $DL_n(a)$ de la forme :

$f''(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$

alors f admet une $DL_{n+1}(a)$ de la forme :

$$f(x) = f(a) + a_0(x-a) + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + o((x-a)^{n+1}) .$$

6°) Notion de développements asymptotiques

Déf : Soit $a \in I$ ou une extrémité, éventuellement infinie de I.

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ avec $\mathcal{D} = I$ ou $\mathcal{D} = I \setminus \{a\}$.

On appelle développement asymptotique de f en a toute décomposition

$f(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + \cdots + a_n g_n(x) + o(g_n(x))$ au voisinage de a avec : $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ et $g_0, \ldots, g_n$ des fonctions « simples » telles que $g_n \ll g_{n-1} \ll \cdots \ll g_0$.

Un tel DA est alors dit réalisé à la précision $g_n(x)$.

III. Applications des développements limités et asymptotiques

1°) Détermination d'équivalents

Le premier terme non nul d'un DL ou d'un DA donne un équivalent simple de la fonction étudiée au point considéré.

2°) Détermination de limite

L'obtention d'un équivalent permet d'obtenir la limite de la fonction considérée.

3°) Prolongement d'une fonction en un point

Prop : Soit a un point de I ou une extrémité finie de I. Soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$.

Si f admet un $DL_1(a)$ de la forme $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + o(x-a)$

alors on peut prolonger f par continuité en a en posant $f(a) = a_0$.

De plus ce prolongement est dérivable en a et $f'(a) = a_1$.

4°) Positionnement local d'une courbe et de sa tangente

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose que f admet un $DL_n(a)$ de la forme :

$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$.

Comme par l'étude ci-dessus, on observe que $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$.

Soit k le plus petit entier supérieur ou égal à 2 tel que $a_k \neq 0$.

On a $f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a)) \underset{a}{\sim} a_k(x-a)^k$.

1er cas : Si k est pair alors $(x-a)^k \geq 0$.

Si $a_k > 0$ alors Γ_f est au dessus de T au voisinage de a.

Si $a_k < 0$ alors Γ_f est en dessous de T au voisinage de a.

2ème cas : Si k est impair alors : $\begin{array}{c|ccc} x & & a & \\ \hline (x-a)^k & - & 0 & + \end{array}$.

Dans ce cas Γ_f traverse sa tangente en a.

Le signe de a_k permet de préciser de quel côté de a, Γ_f est au dessus de T.

5°) Etude de droite asymptote

L'obtention d'un DA en $+\infty$ de la forme $f(x) = ax + b + o(1)$ permet de conclure que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à f en $+\infty$.

De plus l'étude du signe du $o(1)$ permet de positionner la courbe par rapport à l'asymptote.

6°) Etude locale des points d'une courbe paramétrée

On note $\mathcal{P}$ le plan géométrique muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soit $\gamma=(I,M)$ un arc suffisamment régulier et $t_0\in I$ fixé. On étudie l'allure de l'arc γ au point $M(t_0)$.

On note $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées du point $M(t)$.

a) formule de Taylor-Young

Théorème :

Pour tout $n\leq k$, on a, quand $h\to 0$:

$$\overrightarrow{OM}(t_0+h)=\overrightarrow{OM}(t_0)+h\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)+\cdots+\frac{h^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^n\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^n}(t_0)+h^n\overrightarrow{\varepsilon(h)} \text{ avec } \overrightarrow{\varepsilon(h)}\underset{0}{\to}\vec{o}.$$

b) tangente

Théorème :

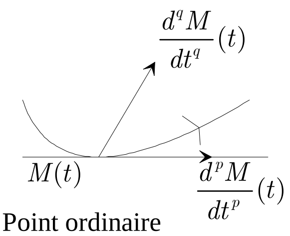
S'il existe un entier $n\geq 1$ tel que $\dfrac{\mathrm{d}^n\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^n}(t_0)\neq\vec{o}$ alors en notant p le plus petit de ces entiers, on peut affirmer que l'arc γ présente une tangente en $M(t)$ dirigée par le vecteur $\dfrac{\mathrm{d}^p\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^p}(t_0)$.

c) position de la courbe par rapport à sa tangente

Supposons qu'il existe un plus petit entier $p\geq 1$ tel que $\dfrac{\mathrm{d}^p\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^p}(t_0)\neq\vec{o}$ (ce vecteur dirige la tangente).

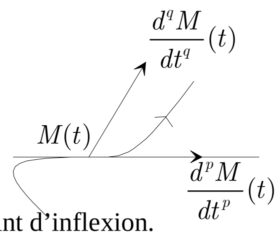
Supposons qu'il existe un plus petit entier $q\geq p+1$ tel que $\dfrac{\mathrm{d}^n\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^n}(t_0)$ n'est pas colinéaire à $\dfrac{\mathrm{d}^p\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^p}(t_0)$.

Si p impair et q pair :



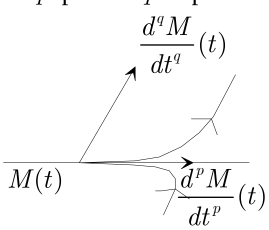
Point ordinaire

Si p impair et q impair :



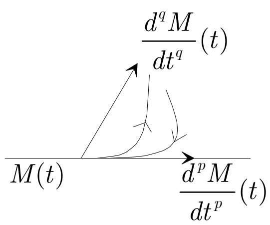
Point d'inflexion.

Si p pair et q impair :



Point de rebroussement de 1ère espèce.

Si p pair et q pair :



Point de rebroussement de 2nde espèce.

d) mise en pratique

(1) On calcule les vecteurs dérivés successifs $\dfrac{\mathrm{d}^n\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^n}$ jusqu'à détermination des entiers p et q.

(2) On réalise un DL de x et y en t_0 :

$x(t)=a_0+a_1(t-t_0)+\cdots+a_n(t-t_0)^n+o((t-t_0)^n)$,

$y(t)=b_0+b_1(t-t_0)+\cdots+b_n(t-t_0)^n+o((t-t_0)^n)$

Donc en notant $\vec{u}_1\begin{vmatrix}a_1\\b_1\end{vmatrix},\ldots,\vec{u}_n\begin{vmatrix}a_n\\b_n\end{vmatrix}$ on a $\vec{u}_k=\dfrac{1}{k!}\dfrac{\mathrm{d}^k\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^k}(t_0)$

On peut alors raisonner à partir des $\vec{u}_k$:

le premier $\vec{u}_p$ non nul donne la direction de la tangente,

le premier $\vec{u}_q$ suivant non colinéaire à $\vec{u}_p$ donne la position de la courbe par rapport à sa tangente.