# Table des matières

Dans cette section, $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide.

# I Quelques rappels

**Définition** *(primitive sur un intervalle)*

Soit $f$ une application de $I$ dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une application $F : I \to \mathbb{R}$ est une *primitive* de $f$ sur $I$ si $F$ est dérivable sur $I$ et si, pour tout $x$ de $I$ : $F'(x) = f(x)$.

**Proposition** *(relation entre les primitives d'une même fonction)*

Soit $f$ une application $I$ dans $\mathbb{R}$ admettant une primitive $F$ sur $I$.

Soit $G$ une application de $I$ dans $\mathbb{R}$. $G$ est une primitive de $f$ sur $I \Leftrightarrow$ il existe une constante $\lambda$ telle que, pour tout $x$ de $I$, $G(x) = F(x) + \lambda$.

**Proposition** *(primitive prenant une valeur donnée en un point donné)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, admettant une primitive $F$ sur $I$. Soient $a$ dans $I$ et $\lambda$ dans $\mathbb{R}$.

Il y a une seule primitive $G$ de $f$ telle que $G(a) = \lambda$. Elle est donnée par $G = F - F(a) + \lambda$.

En particulier, $H = F - F(a)$ est l'unique primitive de $f$ sur $I$ qui s'annule en $a$.

**Proposition** *(expression d'une intégrale à l'aide d'une primitive quelconque)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue.

Pour toute primitive $F$ de $f$, on a : $\forall\,(a,b) \in I^2$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F]_a^b = F(b) - F(a)$.

# II Méthodes de calcul des intégrales

Dans toute la suite, $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ désigne l'ensemble des primitives de $f$ sur $I$.

**Proposition** *(intégration par parties)*

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $\displaystyle\int fg' = fg - \int f'g$.

**Proposition** *(intégrations par parties répétées)*

Soient $f$ et $g$ deux applications de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$.

On a alors l'égalité : $\displaystyle\int fg^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(k)} g^{(n-1-k)} + (-1)^n \int f^{(n)} g$.

**Exemples**

- Si $n = 2$ : $\displaystyle\int fg'' = fg' - f'g + \int f''g$.
- Si $n = 3$ : $\displaystyle\int fg''' = fg'' - f'g' + f''g - \int f'''g$.

**Proposition** *(changement de variable)*

Soient $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue.

Soit $\varphi : J \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\varphi(J) \subset I$.

Alors, pour tous points $a$ et $b$ de $J$, on a l'égalité : $\displaystyle\int_a^b (f \circ \varphi)\,\varphi' = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f$.

## III Tableau de primitives usuelles

Les résultats qui figurent dans le tableau suivant doivent être parfaitement connus.

| $f(x)$ | $F(x)$ | sur | $f(x)$ | $F(x)$ | sur |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^\alpha,\ (\alpha \neq -1)$ | $\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ | $\mathbb{R}^{+*}$ | $\dfrac{1}{1+x^2}$ | $\arctan x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $\mathbb{R}^{-*}, \mathbb{R}^{+*}$ | $\dfrac{1}{1-x^2}$ | $\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$ | $x \neq \pm 1$ |
| $\mathrm{e}^x$ | $\mathrm{e}^x$ | $\mathbb{R}$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ | $\mathbb{R}$ |
| $a^x\ (a \neq 1)$ | $\dfrac{a^x}{\ln a}$ | $\mathbb{R}$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin x$ | $]-1,1[$ |
| $\sin x$ | $-\cos x$ | $\mathbb{R}$ | $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert$ | $\lvert x\rvert > 1$ |
| $\cos x$ | $\sin x$ | $\mathbb{R}$ | $\tan x$ | $-\ln\lvert\cos x\rvert$ | $x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$ |
| $\mathrm{sh}\, x$ | $\mathrm{ch}\, x$ | $\mathbb{R}$ | $\dfrac{1}{\sin x}$ | $\ln\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\rvert$ | $x \neq k\pi$ |
| $\mathrm{ch}\, x$ | $\mathrm{sh}\, x$ | $\mathbb{R}$ | $\dfrac{1}{\cos x}$ | $\ln\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert$ | $x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$ |
| $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $\tan x$ | $x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$ | $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$ | $\mathrm{th}\, x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\dfrac{1}{\sin^2 x}$ | $-\mathrm{cotan}\, x$ | $x \neq k\pi$ | $\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$ | $-\coth x$ | $\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}^{-*}$ |

On peut généraliser quelques-uns des résultats ci-dessus, notamment :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+\lambda\ ; \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+\lambda$$

**Exemples de situations classiques**

$$\int_a^b \varphi'(t)\,\mathrm{e}^{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{e}^{\varphi(t)}\Big]_a^b\ ; \quad \int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln\lvert\varphi(t)\rvert\Big]_a^b\ ; \quad \int_a^b \varphi'(t)\,\varphi^r(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\varphi^{r+1}(t)}{r+1}\right]_a^b$$

Dans $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, on pose $x = \varphi(t) = \sin t$, avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a donc $\sqrt{1-x^2} = \lvert\cos t\rvert = \cos t$, et $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$.

D'autre part, quand $x = 0$ alors $t = 0$ et quand $x = 1$ alors $t = \frac{\pi}{2}$.

On en déduit : $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos(2t))\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$.

## IV Compléments sur le calcul des primitives

Très souvent le calcul d'une intégrale se ramène au calcul d'une primitive. Dans ce paragraphe, on va passer en revue quelques situations courantes.

On note $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + \lambda$ l'ensemble des primitives d'une application $f$.

### 1) Par linéarité.

On a bien sûr $\displaystyle\int \sum \lambda_k f_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum \lambda_k \int f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

Par exemple : $\displaystyle\int \Big(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\Big)^2 \mathrm{d}x = \int \Big(x - 2 + \frac{1}{x}\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + \lambda$.

### 2) Primitives de $\sin^p x \cos^q x$.

Si on veut calculer $\displaystyle\int \sin^p x \cos^q x\,\mathrm{d}x$, avec $p, q \in \mathbb{N}$, tout dépend de la parité de $p$ et $q$.

◇ Si $p$ est impair, on peut poser $t = \cos x$ (donc $\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$).
Exemple : $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^4 x\,\mathrm{d}x = \int (t^2 - 1)\,t^4\,\mathrm{d}t = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \lambda = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + \lambda$.

◇ Si $q$ est impair, on peut poser $t = \sin x$ (donc $\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$).
Exemple : $\displaystyle\int \cos^5 x\,\mathrm{d}x = \int (1 - t^2)^2\,\mathrm{d}t = t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \lambda = \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + \lambda$.

◇ Si $p$ et $q$ sont pairs, on linéarise.
Exemple : $\displaystyle\cos^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int (\cos 4x + 4\cos 2x + 3)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin 4x}{32} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3x}{8} + \lambda$.

### 3) Primitives de $P(x)\,\mathrm{e}^{ax}$, où $P$ est un polynôme.

On peut effectuer des intégrations par parties successives (autant que le degré de $P$), mais on doit réserver cette méthode au cas où $\deg P$ est "petit".
Il est souvent préférable d'utiliser une méthode de coefficients indéterminés, et de chercher une primitive de $P(x)\,\mathrm{e}^{ax}$ sous la forme $Q(x)\,\mathrm{e}^{ax}$, avec $\deg Q = \deg P$.

◇ Exemple : On veut calculer $\displaystyle\int (x^3 - 2x + 1)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

On pose $\displaystyle\int (x^3 - 2x + 1)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = Q(x)\,\mathrm{e}^{-x} + \lambda$, avec $Q(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$.

Par dérivation et identification :

$$\begin{aligned}
(Q(x)\,\mathrm{e}^{-x})' &= (Q'(x) - Q(x))\,\mathrm{e}^{-x}\\
&= (-\alpha x^3 + (3\alpha - \beta)x^2 + (2\beta - \gamma)^x + \gamma - \delta)\,\mathrm{e}^{-x}\\
&= (x^3 - 2x + 1)\,\mathrm{e}^{-x}\\
&\Rightarrow \alpha = -1, \quad \beta = -3, \quad \gamma = -4, \quad \delta = -5.
\end{aligned}$$

Ainsi $\displaystyle\int (x^3 - 2x + 1)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -(x^3 + 3x^2 + 4x + 5)\,\mathrm{e}^{-x} + \lambda$.

**4) Primitives de $P(x)\,\sin ax$, ou $P(x)\,\cos ax$, ou $P(x)\,\mathrm{sh}\,ax$ ou $P(x)\,\mathrm{ch}\,ax$.**

On est ramené au cas précédent en utilisant les formules d'Euler (dans les deux premiers cas, on obtient des intégrales de fonctions à valeurs complexes.)

◇ Exemple : On veut calculer $I = \displaystyle\int (x^3-2x+1)\,\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{d}x$. On remplace $\mathrm{ch}\,x$ par $\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

On a donc $I = \dfrac{J+K}{2}$, avec $J = \displaystyle\int (x^3-2x+1)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ et $K = \displaystyle\int (x^3-2x+1)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

On sait déjà que $J = -(x^3+3x^2+4x+5)\,\mathrm{e}^{-x}+\lambda$ (voir exemple précédent).

Une méthode analogue donne $K = (x^3-3x^2+4x-3)\mathrm{e}^x+\lambda$.

On en déduit : $I = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x\,(x^3-3x^2+4x-3) - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}\,(x^3+3x^2+4x+5)+\lambda$.

Dans le résultat, on peut remplacer $\mathrm{e}^x$ par $\mathrm{ch}\,x+\mathrm{sh}\,x$ et $\mathrm{e}^{-x}$ par $\mathrm{ch}\,x-\mathrm{sh}\,x$.

Tout calcul fait, on trouve : $I = -(3x^2+4)\,\mathrm{ch}\,x+(x^3+4x+1)\,\mathrm{sh}\,x$.

◇ Remarque : Si les coefficients de $P$ sont réels, on a intérêt à écrire :

$$\int P(x)\,\sin(ax)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\Big(\int P(x)\,\mathrm{e}^{iax}\,\mathrm{d}x\Big) \text{ et } \int P(x)\,\cos(ax)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\Big(\int P(x)\,\mathrm{e}^{iax}\,\mathrm{d}x\Big)$$

◇ Exemple : On veut calculer $J = \displaystyle\int x^4\cos x\,\mathrm{d}x$. On écrit $J = \mathrm{Re}\Big(\displaystyle\int x^4\mathrm{e}^{ix}\,\mathrm{d}x\Big)$.

La méthode d'identification donne $\displaystyle\int x^4\mathrm{e}^{ix}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{ix}(ix^4-4x^3-12ix^2+24x+24i)+\lambda$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} J &= \int x^4\cos x\,\mathrm{d}x = x^4\sin x+4x^3\cos x-12x^2\sin x-24x\cos x+24\sin x+\lambda \\ &= (x^4-12x^2+24)\sin x+4(x^3-6x)\cos x+\lambda \end{aligned}$$

**5) Utilisation de récurrences.**

Dans le calcul de $I_n = \displaystyle\int f_n(x)\,\mathrm{d}x$, il est parfois possible de trouver une relation de récurrence entre $I_n$ et $I_{n-1}$ et/ou $I_{n-2}$ (en général par une intégration par partie.)

◇ Exemple : calcul de $I_n = \displaystyle\int \sin^n x\,\mathrm{d}x$ ou $J_n = \displaystyle\int \cos^n x\,\mathrm{d}x$ (intégrales de Wallis)

On suppose $n \geq 2$ et on intègre par partie $\sin x\,\sin^{n-1}x$ en dérivant $\sin^{n-1}x$.

On trouve : 
$$\begin{aligned} I_n &= \int \sin^n x\,\mathrm{d}x = -\cos x\,\sin^{n-1}x+(n-1)\int \cos^2 x\,\sin^{n-2}x\,\mathrm{d}x \\ &= -\cos x\,\sin^{n-1}x+(n-1)\int (1-\sin^2 x)\,\sin^{n-2}x\,\mathrm{d}x \\ &= -\cos x\,\sin^{n-1}x+(n-1)(I_{n-2}-I_n) \end{aligned}$$

On en déduit : $I_n = \dfrac{1}{n}\Big(-\cos x\,\sin^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}\Big)$

Connaissant $I_0 = x+\lambda$ et $I_1 = -\cos x+\lambda$, on peut ainsi trouver tous les $I_n$.

◇ Exemple : calcul de $I_n = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^n}$

On intègre par parties, en intégrant 1 et en dérivant $\dfrac{1}{(a^2+x^2)^n}$ :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2n\int \frac{(a^2+x^2)-a^2}{(a^2+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2n(I_n - a^2 I_{n+1}) \Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left[\frac{x}{(a^2+x^2)^n} + (2n-1)I_n\right] \end{aligned}$$

Connaissant $I_1 = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + \lambda$, on en déduit $I_n$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$.

◇ Remarque : autre méthode pour $I_n = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^n}$

On effectue le changement de variable $x = a\tan t$. Ainsi $\mathrm{d}x = a(1+\tan^2 t)\,\mathrm{d}t$.

On trouve : $I_n = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{a^{2n-1}(1+t^2)^{n-1}} = \frac{1}{a^{2n-1}}\int \cos^{2n-2} t\ \mathrm{d}t$.

On est ainsi ramené au calcul d'une intégrale de Wallis.

**6) Primitives des fractions rationnelles.**

On décompose en éléments simples dans $\mathbb{R}$, puis on intègre ces éléments simples. Seuls ceux qui sont de seconde espèce posent problème.

On doit donc intégrer des expressions comme $f(x) = \dfrac{\lambda x + \mu}{(x^2+bx+c)^n}$, où $b^2 - 4c < 0$.

On écrit $f(x) = \dfrac{\lambda(2x+b)}{2(x^2+bx+c)^n} + \dfrac{2\mu - \lambda b}{2(x^2+bx+c)^n}$.

La fonction $g(x) = \dfrac{2x+b}{2(x^2+bx+c)^n}$ s'intègre facilement car elle est du type $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Il reste à intégrer $h(x) = \dfrac{1}{(x^2+bx+c)^n}$.

Or $x^2+bx+c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + a^2$, avec $a = \frac{1}{2}\sqrt{4c-b^2}$.

Le changement de variable $x = t - \frac{b}{2}$ donne : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+bx+c)^n} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n}$.

On est ainsi ramené à une intégrale qu'on sait calculer (exemple précédent).

Remarque : si on ajoute à ce calcul le temps de la décomposition en éléments simples, il est clair que tout cela peut prendre beaucoup de temps.

◇ Exemple (très simple) : calcul de $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+2x+5)}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x^2+2x+5)} &= \frac{1}{5x} - \frac{x+2}{5(x^2+2x+5)} = \frac{1}{5x} - \frac{2x+2}{10(x^2+2x+5)} - \frac{1}{5(x^2+2x+5)} \\ &= \frac{1}{5x} - \frac{2x+2}{10(x^2+2x+5)} - \frac{1}{5((x+1)^2+2^2)} \end{aligned}$$

Conclusion : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+2x+5)} = \frac{1}{5}\ \ln|x| - \frac{1}{10}\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{10}\arctan\frac{x+1}{2} + \lambda$.

◇ Cas des fractions rationnelles impaires

Une fraction rationnelle impaire $R(x)$ s'écrit $R(x) = x\dfrac{A(x^2)}{B(x^2)}$, où $A, B$ sont des polynômes.

Le changement de variable $t = x^2$ permet alors d'abaisser le degré pratiquement de moitié.

Par exemple :

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)^2} &= \int \frac{\mathrm{d}t}{2t(t+1)^2} = \int \Big(\frac{1}{2t} - \frac{1}{2(t+1)^2} - \frac{1}{2(t+1)}\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\ln t + \frac{1}{2(t+1)} - \frac{1}{2}\ln(t+1) + \lambda \\ &= \ln|x| + \frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \lambda\end{aligned}$$

◇ Autres possibilité d'abaisser le degré

Il arrive qu'on puisse abaisser le degré de manière plus spectaculaire.
Par exemple, avec le changement de variable $t = x^5$ :

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^5+1)^2} &= \int \frac{\mathrm{d}t}{5t(t+1)^2} = \frac{1}{5}\ln|t| + \frac{1}{5(t+1)} - \frac{1}{5}\ln(t+1) + \lambda \\ &= \ln|x| + \frac{1}{5(x^5+1)} - \frac{1}{5}\ln(x^5+1) + \lambda\end{aligned}$$

Expérience : calculer l'intégrale précédente avec Maple, ou une TI-89, et commenter.

**7) "Règles de Bioche".**

On considère ici des expressions rationnelles $R(\sin x, \cos x, \tan x)$, c'est-à-dire formées par des sommes, des produits et des puissances entières.

Les règles de Bioche consistent à proposer un changement de variable quand l'expression $R(\sin x, \cos x, \tan x)\,\mathrm{d}x$ est invariante dans une certaine transformation.

Ces changements de variable conduisent à une fraction rationnelle.

◇ On a "l'invariant du cosinus" si $R(\sin x, \cos x, \tan x)\,\mathrm{d}x$ est inchangé dans $x \mapsto -x$.

Dans ce cas, on peut faire le changement de variable $t = \cos x$.

Exemple : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\Big|\frac{1-t}{1+t}\Big| + \lambda = \frac{1}{2}\ln\Big|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\Big| + \lambda = \ln\Big|\tan\frac{x}{2}\Big| + \lambda$

◇ On a "l'invariant du sinus" si $R(\sin x, \cos x, \tan x)\,\mathrm{d}x$ est inchangé dans $x \mapsto \pi - x$.

Dans ce cas, on peut faire le changement de variable $t = \sin x$.

Exemple : $\displaystyle\int \frac{2\cos x\,\mathrm{d}x}{3-\cos 2x} = \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan t + \lambda = \arctan \sin x + \lambda.$

◇ On a "l'invariant de la tangente" si $R(\sin x, \cos x, \tan x)\,\mathrm{d}x$ est inchangé dans $x \mapsto x + \pi$.

Dans ce cas, on peut faire le changement de variable $t = \tan x$.

Exemple : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + \lambda = \ln|\tan x| + \lambda.$

**8) Fractions trigonométriques** $R(\sin x, \cos x, \tan x)$ **sans invariant**

On se place dans le cas précédent, mais on suppose que la fraction en $\sin x, \cos x, \tan x$ ne présente pas d'invariant. Dans ce cas, on peut toujours effectuer le changement $t = \tan \frac{x}{2}$, qui ramène à une fraction rationnelle. l'inconvénient est que le degré est doublé.

Les règles de Bioche sont donc prioritaires si elles sont applicables.

On rappelle que $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

D'autre part, $t = \tan \dfrac{x}{2} \Rightarrow \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\Big(1+\tan^2 \dfrac{x}{2}\Big)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}(1+t^2)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Exemple : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x} = \int \Big(\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}\,\frac{1}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}}\Big) = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+\tan\dfrac{x}{2}} + \lambda$

**9) Fractions trigonométriques** $R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, \operatorname{th} x)$

- On peut s'inspirer des règles de Bioche.
  Pour cela on imagine de remplacer les fonctions hyperboliques par les fonctions circulaires correspondantes, et s'il y a par exemple l'invariant du sinus alors on effectue le changement de variable $t = \operatorname{sh} x$ dans l'intégrale initiale.
- On peut aussi utiliser le changement de variable $t = \operatorname{th} \frac{x}{2}$.
- Le changement de variable $u = \mathrm{e}^x$ ramène lui aussi à une fraction rationnelle.
  On a $\operatorname{sh} x = \dfrac{u^2-1}{2u}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{u^2+1}{2u}$, $\operatorname{th} x = \dfrac{u^2-1}{u^2+1}$, et $u = \mathrm{e}^x \Rightarrow \mathrm{d}u = u\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{u}$.

**10) Un premier type d'intégrale "abélienne"**

On doit intégrer une fraction rationnelle $R(x,y)$, où $y = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

On effectue le changement de variable défini par $y$.

**11) Un second type d'intégrale "abélienne"**

On doit intégrer une fraction rationnelle $R(x,y)$, où $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$.

On pose $y^2 = ax^2+bx+c$ et on se ramène à l'une des trois formes canoniques suivantes :

- $y^2 = \alpha^2((x+\lambda)^2+\mu^2) \Rightarrow$changement de variable $x+\lambda = \mu \operatorname{sh} t$.
- $y^2 = \alpha^2((x+\lambda)^2-\mu^2) \Rightarrow$changement de variable $x+\lambda = \pm\,\mu \operatorname{ch} t$.
- $y^2 = \alpha^2(\mu^2-(x+\lambda)^2) \Rightarrow$changement de variable $x+\lambda = \mu \sin t$.

On retiendra surtout que la présence de $\sqrt{1+x^2}$, $\sqrt{1-x^2}$ ou $\sqrt{x^2-1}$ incite à effectuer les changements de variables définis respectivement par $x = \operatorname{sh} t$, $x = \sin t$ ou $x = \pm \operatorname{ch} t$.

Exemple : on veut calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x(2-x))^{3/2}}$.

On écrit $y = \sqrt{x(2-x)}$ puis $y^2 = x(2-x) = 2x - x^2 = 1-(x-1)^2$.

On pose alors $x-1 = \sin t$. Ainsi $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ et $y = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$.

On en déduit : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x(2-x))^{3/2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{y^3} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \tan t + \lambda = \frac{x-1}{\sqrt{x(2-x)}} + \lambda$.