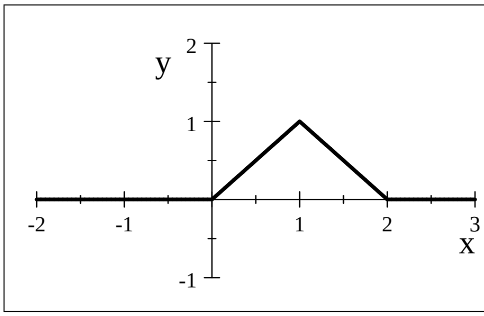
Ing1 2007-2008
Remise à Niveau - ANALYSE

Correction partielle de la série 3

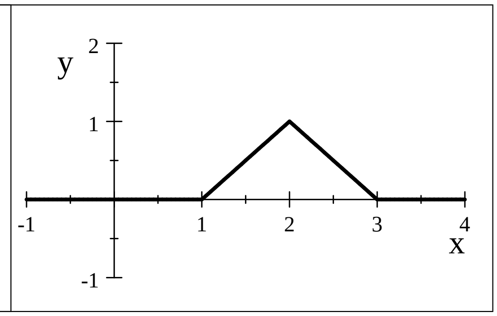
Transformée de Laplace

Exercice 3

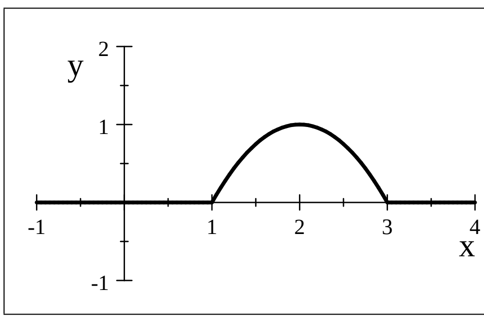
Déterminer la transformée de Laplace des fonctions données par les graphes ci-dessous :



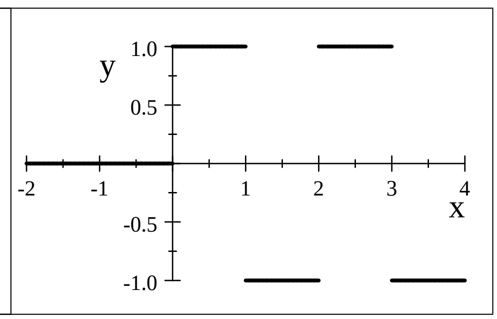
Fonction f



Fonction g



Fonction h



Fonction l

Le cours pour les fonctions périodiques causales de période T donne :

$$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{\mathcal{L}(f_0)(p)}{1 - e^{-pT}}$$

où f_0 est la fonction définie sur une période et nulle ailleurs, représentant le motif de base de f.

Ici on a

$$f_0(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 < t < 1 \\ -1 \text{ si } 1 < t < 2 \end{cases}$$

et $\mathcal{L}(f_0)(p) = \int_0^2 f_0(t)e^{-pt}dt = \int_0^1 1.e^{-pt}dt + \int_1^2 -1.e^{-pt}dt = \left[-\frac{1}{p}e^{-p}\right]_0^1 - \left[-\frac{1}{p}e^{-p}\right]_1^2 = -\frac{2}{p}e^{-p} + \frac{1}{p} + \frac{e^{-2p}}{p}$.

On en déduit

$$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{1 - e^{-2p}}\left(-\frac{2}{p}e^{-p} + \frac{1}{p} + \frac{e^{-2p}}{p}\right)$$

car $T = 2$ et donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(p) &= \frac{1}{p(e^{2p} - 1)}\left(-2e^{p} + e^{2p} + 1\right) = \frac{1}{p(e^{p} - 1)(e^{p} + 1)}\left(e^{p} - 1\right)^2 \\ &= \frac{e^{p} - 1}{p(e^{p} + 1)} \end{aligned}$$

Exercice 4

Calculer l'inverse de la transformée de Laplace pour les fonctions suivantes :

1. $\dfrac{2}{s^3}$ 2. $\dfrac{3}{s-3}$ 3. $\dfrac{4}{(s-3)^2}$ 4. $\dfrac{5}{s^2-9}$

5. $\dfrac{s}{(2-s)(2+s)}$ 6. $\dfrac{1}{s^2+s-1}$ 7. $\dfrac{e^{-2s}}{s-1}$ 8. $\dfrac{s^2}{(s-1)(s+3)}$

1. $\mathcal{L}^{-1}(\dfrac{2}{s^3})(t) = t^2 H(t)$

2. $\mathcal{L}^{-1}(\dfrac{3}{s-3})(t) = 3\mathcal{L}^{-1}(\dfrac{1}{s-3})(t) = 3e^{3t}H(t)$

3. $\mathcal{L}^{-1}(\dfrac{4}{(s-3)^2})(t) = 4\mathcal{L}^{-1}(\dfrac{1}{(s-3)^2})(t) = 4\mathcal{L}^{-1}(\dfrac{1}{s^2})(t.e^{3t})$. Comme $\mathcal{L}^{-1}(\dfrac{1}{s^2})(T) = TH(T)$, on a $\mathcal{L}^{-1}(\dfrac{1}{s^2})(t.e^{3t}) = t.e^{3t}H(t.e^{3t})$. Or $H(t.e^{3t}) = \begin{cases} 1 \text{ si } t.e^{3t} > 0 \\ 0 \text{ si } t.e^{3t} < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases} = H(t)$ donc $\mathcal{L}^{-1}(\dfrac{1}{s^2})(t.e^{3t}) = t.e^{3t}H(t)$.

4. $\mathcal{L}^{-1}(\dfrac{5}{s^2-9})(t) = \frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}(\dfrac{3}{s^2-3^2})(t) = \frac{5}{3}sh(3t)H(t)$

5. $\mathcal{L}^{-1}(\dfrac{s}{(2-s)(2+s)})(t)$ nécessite la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle :
$$\frac{s}{(2-s)(2+s)} = -\frac{1}{2(s-2)} - \frac{1}{2(s+2)}$$
Par linéarité, on en déduit :
$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{(2-s)(2+s)})(t) &= -\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{2(s-2)})(t) - \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{2(s+2)})(t) \\ &= -\frac{1}{2}e^{2t}H(t) - \frac{1}{2}e^{-2t}H(t) = -\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}H(t) \\ &= -ch(2t)H(t)\end{aligned}$$

6. $\mathcal{L}^{-1}(\dfrac{1}{s^2+s-1})(t)$ La fraction rationnelle est irréductible puisque son dénominateur n'admet pas de racine réelle, on passe par la forme canonique :
$$\frac{1}{s^2+s-1} = \frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}$$
Donc
$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2+s-1})(t) &= \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}})(t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2-\frac{5}{4}})(e^{-t/2}t) = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{s^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}\right)(e^{-t/2}t) \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}}sh(\frac{\sqrt{5}}{2}te^{-t/2})H(t)\end{aligned}$$

7. $\mathcal{L}^{-1}(\dfrac{e^{-2s}}{s-1})(t)$. On utilise le fait que

$$\mathcal{L}\left(g(t-a)H(t-a)\right)(s) = e^{-as}\mathcal{L}(g(t)H(t))(s)$$

donc

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}\left(g(t-a)H(t-a)\right)(s)\right](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-as}\mathcal{L}(gH)(s)\right](t)\\ &= g(t-a)H(t-a)\end{aligned}$$

Pour $a=2$, et $\mathcal{L}(gH)(s) = \dfrac{1}{s-1}$, on a $g(t) = e^t$ donc

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-as}\mathcal{L}(gH)(s)\right] &= \mathcal{L}^{-1}(\frac{e^{-2s}}{s-1})(t)\\ &= g(t-a)H(t-a)\\ &= e^{t-2}H(t-2)\end{aligned}$$

8. $\mathcal{L}^{-1}(\dfrac{s^2}{(s-1)(s+3)})(t)$. On utilise la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle :

$$\frac{s^2}{(s-1)(s+3)} = 1 + \frac{1}{4(s-1)} - \frac{9}{4(s+3)}$$

dont on tire directement :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}(\frac{s^2}{(s-1)(s+3)})(t) &= \mathcal{L}^{-1}(1+\frac{1}{4(s-1)} - \frac{9}{4(s+3)})(t)\\ &= \mathcal{L}^{-1}(1)(t) + \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{4(s-1)})(t) - \mathcal{L}^{-1}(\frac{9}{4(s+3)})(t)\\ &= \delta(t) + \left(\frac{1}{4}e^t - \frac{9}{4}e^{-3t}\right)H(t)\end{aligned}$$

Exercice 5

En utilisant la transformation de Laplace, résoudre sur $]0,+\infty[$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - y = \sin 2x$ avec $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

   On a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y'')(s) &= s^2\mathcal{L}(y)(s) - sy(0) - y'(0)\\ &= s^2\mathcal{L}(y)(s) - s + 1\end{aligned}$$

   en intégrant les conditions initiales. Par application de la transformation de Laplace aux deux membres de l'ED, on obtient :

$$\begin{aligned}s^2\mathcal{L}(y)(s) - s + 1 - \mathcal{L}(y)(s) &= \mathcal{L}(\sin 2x)(s)\\ &= \frac{2}{s^2+4}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\left(s^2-1\right)\mathcal{L}(y)(s) &= \frac{2}{s^2+4}+s-1\\ &\Leftrightarrow \mathcal{L}(y)(s)=\frac{-2}{5(s^2+4)}+\frac{1}{5(s-1)}+\frac{4}{5(s+1)}\end{aligned}$$

d'où

$$y(t)=\left(-\frac{1}{5}\cos(2t)+\frac{1}{5}e^{t}+\frac{4}{5}e^{-t}\right)H(t)$$

2. $y" + 2y + y = e^{-x}$ avec $\left\{\begin{array}{l} y(0)=1\\ y'(0)=0\end{array}\right.$

Le même type de calcul sur l'ED donne :

$$\begin{aligned} s^2\mathcal{L}(y)(s)-s+2s\mathcal{L}(y)(s)-2+\mathcal{L}(y)(s) &= \mathcal{L}(e^{-x})(s)\\ &= \frac{1}{s+1}\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\left(s^2+2s+1\right)\mathcal{L}(y)(s)-2-s &= \frac{1}{s+1}\\ &\Leftrightarrow (s+1)^2\mathcal{L}(y)(s)=\frac{1}{s+1}+2+s\\ &\Leftrightarrow \mathcal{L}(y)(s)=\frac{1}{(s+1)^3}+\frac{2+s}{(s+1)^2}\end{aligned}$$

La décomposition en éléments simples du second membre donne:

$$\frac{1}{(s+1)^3}+\frac{2+s}{(s+1)^2}=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+1)^3}$$

donc

$$\mathcal{L}(y)(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+1)^3}$$

d'où

$$\mathcal{L}(y)(s)=\mathcal{L}(y_1)(s)+\mathcal{L}(y_2)(s)+\mathcal{L}(y_3)(s)$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l}\mathcal{L}(y_1)(s)=\frac{1}{s+1}\\ \mathcal{L}(y_2)(s)=\frac{1}{(s+1)^2}\\ \mathcal{L}(y_3)(s)=\frac{1}{(s+1)^3}\end{array}\right.$$

$\mathcal{L}(y_1)(s)=\frac{1}{s+1}\Rightarrow y_1(t)=e^{-t}H(t)$.

$\mathcal{L}(y_2)(s)=\frac{1}{(s+1)^2}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+1}\right)=-\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}(e^{-t})(s)\right)=\mathcal{L}(te^{-t})(s)\Rightarrow y_2(t)=te^{-t}H(t)$

$\mathcal{L}(y_3)(s)=\frac{1}{(s+1)^3}=\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s+1}\right)=\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left(\mathcal{L}(e^{-t})(s)\right)=\frac{1}{2}\mathcal{L}(t^2e^{-t})(s)=\mathcal{L}(\frac{t^2e^{-t}}{2})(s)\Rightarrow y_3(t)=\frac{t^2e^{-t}}{2}H(t)$.

Finalement

$$y(t)=\left(e^{-t}+te^{-t}+\frac{t^2e^{-t}}{2}\right)H(t)$$

3. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x$ avec $\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{array} \right.$

Exercice 6

Trouver les solutions $(x(t), y(t))$ du système différentiel sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = -5x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = -2x(t) - 5y(t) \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales$\left\{ \begin{array}{l} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$

On applique la transformée de Laplace aux deux équations, on obtient avec $\mathcal{L}(x')(s) = s\mathcal{L}(x)(s) - x(0) = s\mathcal{L}(x)(s) - 2$, et $\mathcal{L}(y')(s) = s\mathcal{L}(y)(s) - y(0) = s\mathcal{L}(y)(s)$:

$$\left\{ \begin{array}{c} s\mathcal{L}(x)(s) - 2 = -5\mathcal{L}(x)(s) + 2\mathcal{L}(y)(s) \\ s\mathcal{L}(y)(s) = -2\mathcal{L}(x)(s) - 5\mathcal{L}(y)(s) \end{array} \right.$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{l} (s+5)\mathcal{L}(x)(s) - 2\mathcal{L}(y)(s) = 2 \\ 2\mathcal{L}(x)(s) + (s+5)\mathcal{L}(y)(s) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} s+5 & -2 \\ 2 & s+5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L}(x)(s) \\ \mathcal{L}(y)(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x)(s) = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & s+5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+5 & -2 \\ 2 & s+5 \end{vmatrix}} = \frac{2(s+5)}{(s+5)^2 + 4}$$

et

$$\Rightarrow \mathcal{L}(y)(s) = \frac{\begin{vmatrix} s+5 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+5 & -2 \\ 2 & s+5 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{(s+5)^2 + 4}$$

dont on tire ensuite $x(t)$ et $y(t)$.