Ing1 2007-2008
Remise à Niveau - ANALYSE

Série 3

Transformée de Laplace

Exercice 1

1. En utilisant la définition de la transformée de Laplace, déterminer $\mathcal{L}(U)$ où U est la fonction échelon unité.
2. Soit $f_n : t \longmapsto t^n U(t)$, pour $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Que vaut $\sigma(f_n)$?
   (b) Déterminer une relation entre $\mathcal{L}(f_n)$ et $\mathcal{L}(f_{n-1})$
   (c) En déduire $\mathcal{L}(f_n)$

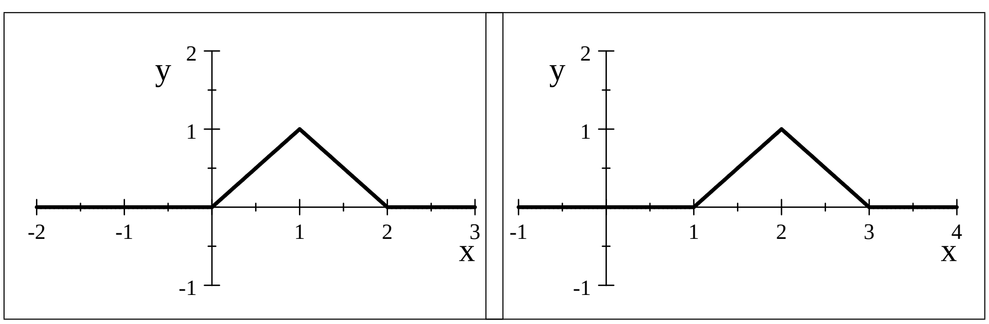
Exercice 2

A l'aide du tableau de la transformation de Laplace, calculer les transformées de Laplace, en donnant leur ensemble de définition, des fonctions causales définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

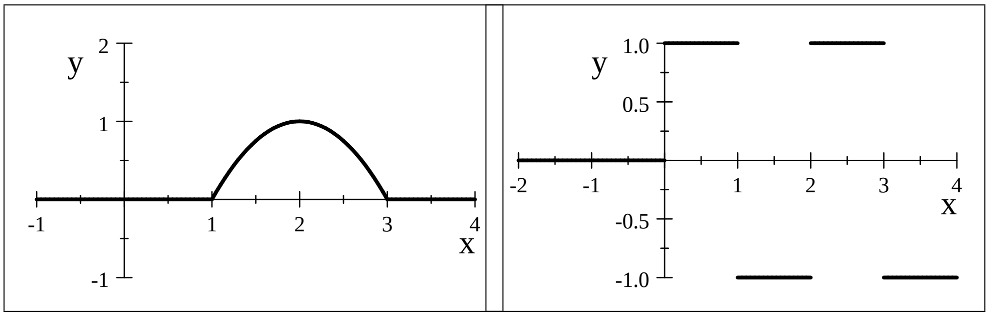
1. t^5	2. $t^2(1-t)$	3. $2e^{3t}\sin t$
4. $t^2\cos(2t) + 5 - e^{-7t}$	5. $e^{-2x}(x^3+1)$	6. $e^{-t}t\sin 2t$
7. $\sin^2 t$	8. $U(t-a)$	9. $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [0, a[\\ 0 \text{ si } t \in [a, +\infty[\end{cases}$

Exercice 3

Déterminer la transformée de Laplace des fonctions données par les graphes ci-dessous :



Fonction f Fonction g



Fonction h Fonction l

Exercice 4

Calculer l'inverse de la transformée de Laplace pour les fonctions suivantes :

1. $\dfrac{2}{s^3}$
2. $\dfrac{3}{s-3}$
3. $\dfrac{4}{(s-3)^2}$
4. $\dfrac{5}{s^2-9}$
5. $\dfrac{s}{(2-s)(2+s)}$
6. $\dfrac{1}{s^2+s-1}$
7. $\dfrac{e^{-2s}}{s-1}$
8. $\dfrac{s^2}{(s-1)(s+3)}$

Exercice 5

En utilisant la transformation de Laplace, résoudre sur $]0,+\infty[$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - y = \sin 2x$ avec $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

2. $y\text{''} + 2y + y = e^{-x}$ avec $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

3. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sin 2x$ avec $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

Exercice 6

Trouver les solutions $(x(t), y(t))$ du système différentiel sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 5y(t) \\ y'(t) = x(t) - 3y(t) \end{cases}$$

avec les conditions initiales $\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$