**Ing1 2007-2008**
**Remise à niveau - ANALYSE**

# Série 2

*Intégrales généralisées*

Sauf mention contraire les exercices sont tirés des TD de l'UPPA de 2006-2007.

## Exercice I - Cas d'un intervalle d'intégration non borné :

Montrer que les intégrales généralisées suivantes :

**a)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\, e^{-x}\, dx$ **b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \sin x\, dx$

converge pour **a)** (calculer alors sa valeur), diverge pour **b)**.

## Exercice II - Fonction non bornée sur un intervalle borné :

Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes et donner leur valeur si elles convergent :

**a)** $\displaystyle\int_0^1 \ln x\, dx$ **b)** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$. **c)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$

## Exercice III

Justifier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

**a)** $\displaystyle\int_0^1 x\, \ln x\, dx$ **b)** $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\ln x}$.

## Exercice IV - Fonctions de signe constant :

Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

**a)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ **b)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\, dx$ **c)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}\, dx$

**d)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\, dx$ **e)** $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-3x+2}}$ **f)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\cos x}}{x^2}\, dx$

**g)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$ **h)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx$.

**Exercice V - Fonctions de signe non constant :**

Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

**a)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{x^2+1}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ **c)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$

**d)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ puis $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)dx$ **e)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(1-\cos(\frac{1}{x})\right)dx.$

**Exercice VI** - Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

**a)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(x^2)dx$ **b)** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x\ \ln(1-x)}{x}dx$ **c)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ \text{Arctan}x}{1+x^4}dx$

**d)** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$ **e)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(1+x^4)(1+\alpha^2x^2)}dx\ ,\ \alpha\in\mathbb{R}$ **f)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\sin x}{x}dx.$

**Exercice VII** - Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, $a\in\mathbb{R}$, décroissante sur $[a,+\infty[$ et telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Montrer que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\sin x\,dx$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\cos x\,dx$ convergent.

**Exercice VIII** - Pour quelles valeurs de $\alpha\in\mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\,dx$ converge-t-elle ?

**Exercice IX (TD UPPA 2005-2006)**

1. (a) Etudier la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}dt, \alpha\in\mathbb{R}^+$

   (b) Montrer que $\int_0^{+\infty} \sin x\sin(\frac{1}{x})dx$ est convergente.
   (On pourra utiliser une intégration par parties sur un intervalle bien choisi)

   (c) Montrer que $\int_1^{+\infty} \sin(x^2)dx$ est convergente
   (Sur cet intervalle bien choisi, on pourra poser $u=x^2$, puis utiliser le a))