Correction de la série 1 bis

Révisions : Développements limités et Equivalents

Exercice 1

1) $\lim\limits_{t\to 1}\frac{t^t-1}{1-t+\ln(1+t)}$. On pose $x=1-t$ pour se ramener en 0.$\lim\limits_{t\to 1}\frac{t^t-1}{1-t+\ln(1+t)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-x)^{1-x}-1}{x+\ln(2-x)}$. Pour $\ln(2-x)$, $\lim\limits_{x\to 0}\ln(2-x)=\ln 2$ donc $\lim\limits_{x\to 0}x+\ln(2-x)=\ln 2$. Si on fait un DL on trouve que :

$$x+\ln(2-x)=\ln 2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+x^2\varepsilon(x)$$

En ce qui concerne le numérateur, on a $(1-x)^{1-x}=e^{(1-x)\ln(1-x)}$. Il est dangereux d'écrire directement que sa limite est égale à 1, car on ne peut pas élever une limite à une puissance. On le vérifie donc avec un DL, ou un équivalent. D'après le DL du $\ln(1+x)$ on a :

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}++x^2\varepsilon(x)$$

donc

$$(1-x)\ln(1-x)=(1-x)\left[-x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\right]=-x-\frac{x^2}{2}+x^2+x^2\varepsilon(x)=-x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)$$

Comme

$$e^X=1+\frac{X}{1!}+\frac{X^2}{2!}+X^2\varepsilon(X)$$

on obtient en posant $X=-x+\frac{x^2}{2}$:

$$e^{(1-x)\ln(1-x)}=1-x+\frac{x^2}{2}+\left(-x+\frac{x^2}{2}\right)^2+x^2\varepsilon(x)=1-x+\frac{x^2}{2}+x^2+x^2\varepsilon(x)=1-x+\frac{3x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)$$

. On en déduit le DL du numérateur :

$$(1-x)^{1-x}-1=-x+\frac{3x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)$$

Le quotient $\frac{(1-x)^{1-x}-1}{x+\ln(2-x)}$ a donc pour limite 0.

2) $\lim\limits_{t\to 1}\frac{\ln(t)}{t-1}$. On pose $x=t-1$ pour se ramener en 0.$\lim\limits_{t\to 1}\frac{\ln(t)}{t-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$. L'équivalent de $\ln(1+x)$ en 0 est x, donc le quotient $\frac{\ln(1+x)}{x}$ est équivalent à 1. On a donc $\lim\limits_{t\to 1}\frac{\ln(t)}{t-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^x}$. On pose $t=\frac{1}{x}$ pour se ramener en 0^+.

$$\begin{aligned}\frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^x} &= \frac{e^{\sqrt{x}\ln x}}{e^{x\ln\sqrt{x}}}=\frac{e^{\frac{-\ln t}{\sqrt{t}}}}{e^{\frac{-\ln t}{2t}}}=e^{\frac{-\ln t}{\sqrt{t}}}e^{\frac{\ln t}{2t}}=\exp\left[\frac{-\ln t}{\sqrt{t}}+\frac{\ln t}{2t}\right]=\exp\left[\left(\frac{-1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{2t}\right)\ln t\right]\\ &= \exp\left[\left(\frac{-2\sqrt{t}+1}{2t}\right)\ln t\right]\end{aligned}$$

Raisonnons en équivalents :

$$\left(\frac{-2\sqrt{t}+1}{2t}\right)\ln t\underset{0}{\sim}\left(\frac{1}{2t}\right)\ln t$$

or

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{2t}\right)\ln t=-\infty$$

d'où

$$\lim_{t\to 0^+}\exp\left[\left(\frac{-2\sqrt{t}+1}{2t}\right)\ln t\right]=0$$

et donc

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^{x}}=0$$

Exercice 2

1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1-x^x}+\frac{1}{x\ln x}$. Considérons la seconde partie : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x\ln x}=-\infty$. C'est donc cette fraction qui donne la limite de la somme sauf si la première tend aussi vers l'infini (positivement).

$$1-x^x=1-e^{x\ln x}\text{ donc comme }\lim_{x\to 0^+}x\ln x=0^-\text{ on a }\lim_{x\to 0^+}e^{x\ln x}=1^-\text{ donc }\lim_{x\to 0^+}1-e^{x\ln x}=0^+$$

Par suite $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1-x^x}=+\infty$.Donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1-x^x}+\frac{1}{x\ln x}$ n'est pas calculable directement.

Considérons $1-x^x$. On a d'après le DL de e^X :

$$1-x^x=1-e^{x\ln x}=1-\left[1+x\ln x+\frac{(x\ln x)^2}{2}+(x\ln x)^2\,\varepsilon(x)\right]=-x\ln x-\frac{(x\ln x)^2}{2}+(x\ln x)^2\,\varepsilon(x)$$

donc

$$\frac{1}{1-x^x}=\frac{1}{-x\ln x-\frac{(x\ln x)^2}{2}+(x\ln x)^2\,\varepsilon(x)}=\frac{1}{x\ln x\left[-1-\frac{x\ln x}{2}+(x\ln x)\,\varepsilon(x)\right]}$$

d'où

$$\frac{1}{1-x^x}+\frac{1}{x\ln x}=\frac{1}{x\ln x\left[-1-\frac{x\ln x}{2}+(x\ln x)\,\varepsilon(x)\right]}+\frac{1}{x\ln x}=\frac{1}{x\ln x}\left[\frac{-1}{1+\frac{x\ln x}{2}+(x\ln x)\,\varepsilon(x)}+1\right]$$

Avec le DL de $\frac{1}{1+X}$ en posant $X=\frac{x\ln x}{2}$ on obtient :

$$\frac{1}{1-x^x}+\frac{1}{x\ln x}=\frac{1}{x\ln x}\left[-1+\frac{x\ln x}{2}+1+(x\ln x)\,\varepsilon(x)\right]=\frac{1}{2}+\varepsilon(x)$$

donc

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-x^x}+\frac{1}{x\ln x}=\frac{1}{2}$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$. On voit de suite que la limite n'est pas calculable directement puisqu'on a "$+\infty-\infty$". Posons $t=1/x$ pour se ramener en 0 :

$$\begin{aligned}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}&=\sqrt{\frac{1}{t}+\sqrt{\frac{1}{t}}}-\sqrt{\frac{1}{t}}=\sqrt{\frac{1}{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}}-\frac{1}{\sqrt{t}}=\sqrt{\frac{1}{t}\left(1+\frac{t}{\sqrt{t}}\right)}-\frac{1}{\sqrt{t}}\\&=\frac{1}{\sqrt{t}}\left(\sqrt{1+\frac{t}{\sqrt{t}}}-1\right)\end{aligned}$$

Du DL de $\sqrt{1+X}$ en posant $X=\frac{t}{\sqrt{t}}$ (qui tend bien vers 0 quand $t\to 0$), on déduit :

$$\sqrt{1+\frac{t}{\sqrt{t}}}=1+\frac{t}{2\sqrt{t}}-\frac{1}{8}t+t\varepsilon(t)$$

donc

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\left(\sqrt{1+\frac{t}{\sqrt{t}}}-1\right)=\frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{t}{2\sqrt{t}}-\frac{1}{8}t+t\varepsilon(t)\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\sqrt{t}+\sqrt{t}\varepsilon(t)$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{t}}\left(\sqrt{1+\frac{t}{\sqrt{t}}}-1\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\sqrt{t}\right)=\frac{1}{2}$$

Exercice 3

1. $x+\sin x$ lorsque $x\to 0$: $\sin x \underset{0}{\sim} x$ donc $x+\sin x \underset{0}{\sim} 2x$

2. $x+\sin x$ lorsque $x\to+\infty$: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}1+\frac{\sin x}{x}$. Comme $\sin x$ est borné en $+\infty$ et que $1/x$ tend vers 0 on a $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to\infty}1+\frac{\sin x}{x}=1$, d'après la définition des équivalents on a donc $x+\sin x\underset{\infty}{\sim} x$

3. $x-\sin x$ lorsque $x\to 0$: $\sin x\underset{0}{\sim} x$ donc on ne peut pas faire la somme des équivalents sous peine d'avoir simplification. Il faut faire un DL d'ordre 3 en 0 :

$$\sin\, x = x-\frac{x^3}{3!}+x^3\varepsilon(x)$$

donc

$$x-\sin\, x=\frac{x^3}{3!}+x^3\varepsilon(x)$$

d'où

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin\, x}{\frac{x^3}{3!}}=1$$

ce qui conduit à $x-\sin x\underset{0}{\sim}\frac{x^3}{3!}$

4. $x-\sin x$ lorsque $x\to+\infty$. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}1-\frac{\sin x}{x}=1$ pour la même raison que précédemment, donc $x-\sin x\underset{\infty}{\sim} x$

5. $\ln(\tan x)$ lorsque $x\to 0^+$: On sait que $\tan\, x\underset{0}{\sim} x$ et on a le droit de composer par le ln donc $\ln(\tan x)\underset{0}{\sim}\ln x$.

6. $\ln(\tan x)$ lorsque $x\to\frac{\pi}{4}$:Posons $X=\frac{\pi}{4}-x$ alors $\ln(\tan x)=\ln(\tan\left(\frac{\pi}{4}-X\right))=\ln\left(\frac{1-\tan X}{1+\tan X}\right)=\ln(1-\tan X)-\ln(1+\tan X)$. $\tan\, x\underset{0}{\sim} x$ donc $\ln(1-\tan X)\underset{0}{\sim}-X$ et $\ln(1+\tan X)\underset{0}{\sim} X$ donc on peut faire la différence des équivalents et on a :

$$\ln(1-\tan X)-\ln(1+\tan X)\underset{0}{\sim}-2X$$

d'où

$$\ln(\tan x)\underset{\frac{\pi}{4}}{\sim}-2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\frac{\pi}{2}+2x$$

7. $\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}$ lorsque $x \to 0$: On sait que $\tan x \underset{0}{\sim} x$ donc $(\tan x)^{-1} \underset{0}{\sim} x^{-1}$ et on ne peut donc pas se contenter de cette écriture pour trouver l'équivalent demandé. Par contre

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x}{\tan x}\right)$$

Du DL de $\tan x$ en 0, on déduit que

$$\frac{\tan\, x}{x} = 1 + \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon(x)$$

donc

$$\left(\frac{\tan\, x}{x}\right)^{-1} = \left[1 + \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon(x)\right]^{-1}$$

En posant $X = \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon(x)$ on obtient avec le DL de $\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 + \cdots + (-1)^n X^n + o(X^n)$

$$\frac{x}{\tan x} = \left(\frac{\tan\, x}{x}\right)^{-1} = 1 - \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon(x)$$

on en tire

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x}{\tan x}\right) = \frac{1}{x}\left(1 - 1 + \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon(x)\right) = \frac{x}{3} + x\varepsilon(x)$$

donc

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} \underset{0}{\sim} \frac{x}{3}$$

8. $\sqrt{x^2+x} - ^3\sqrt{x^3+2x^2}$ lorsque $x \to +\infty$: $\sqrt{x^2+x} - ^3\sqrt{x^3+2x^2} = x\sqrt{1+\frac{1}{x}} - x^3\sqrt{1+\frac{2}{x}} = x\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}} - ^3\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right]$. Comme $\frac{1}{x}$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$, on peut utiliser le DL de $\sqrt{1+X} = 1 + \frac{X}{2} - \frac{1}{8}X^2 + X^2\varepsilon(X)$ et celui de $(1+X)^\alpha = 1 + \alpha X + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}X^2 + X^2\varepsilon(X)$ avec $\alpha = \frac{1}{3}$ soit :

$$(1+X)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{X}{3} - \frac{1}{9}X^2 + X^2\varepsilon(X)$$

On en déduit :

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}} - ^3\sqrt{1+\frac{2}{x}} = 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} - \left(1 + \frac{2}{3x} - \frac{4}{9x^2}\right) + \frac{1}{x^2}\varepsilon(\frac{1}{x}) = \frac{-1}{6x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$$

donc

$$\sqrt{x^2+x} - ^3\sqrt{x^3+2x^2} = \frac{-1}{6} + \varepsilon(\frac{1}{x})$$

soit

$$\sqrt{x^2+x} - ^3\sqrt{x^3+2x^2} \underset{\infty}{\sim} \frac{-1}{6}$$

9. $\sqrt{x^2+x} - ^3\sqrt{x^3+2x^2}$ lorsque $x \to 0^+$: $\sqrt{x^2+x} - ^3\sqrt{x^3+2x^2} = \sqrt{x}\sqrt{x+1} - ^3\sqrt{2x^2}^3\sqrt{\frac{x}{2}+1}$.
En utilisant le DL de $\sqrt{x+1}$ en 0 et celui de $^3\sqrt{X+1}$ en 0, on obtient :

$$\sqrt{x}\sqrt{x+1} = \sqrt{x} + \frac{x\sqrt{x}}{2} + x\sqrt{x}\varepsilon(x)$$

et

$$^3\sqrt{\frac{x}{2}+1} = 1 + \frac{x}{6} + x\varepsilon(x) \Rightarrow ^3\sqrt{2x^2}^3\sqrt{\frac{x}{2}+1} = ^3\sqrt{2x^2} + \frac{^3\sqrt{2}x^{5/3}}{6} + x^{5/3}\varepsilon(x)$$

donc

$$\sqrt{x^2+x} -^3 \sqrt{x^3+2x^2} = \sqrt{x} -^3 \sqrt{2x^2} + \frac{x\sqrt{x}}{2} + x\sqrt{x}\varepsilon(x) = x^{1/2} -^3 \sqrt{2}x^{2/3} + \frac{x^{3/2}}{2} + x^{3/2}\varepsilon(x)$$

donc

$$\sqrt{x^2+x} -^3 \sqrt{x^3+2x^2} \underset{0}{\sim} \sqrt{x}$$