Correction de la Série 1

Révisions : Intégrales

Exercice 1

Calculer les primitives suivantes :

$$\begin{aligned} P_1 &= \int \frac{dx}{x^2+5} \quad P_2 = \int \frac{dx}{x^2-5} \quad P_3 = \int e^x \sin(e^x) dx \quad P_4 = \int \tan^3 x dx \\ P_5 &= \int \frac{dx}{\tan^3 x} \quad P_6 = \int \frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^m} dx, m \in \mathbb{N} \quad P_7 = \int \frac{\ln x}{x} dx \quad P_8 = \int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^5 x} dx \end{aligned}$$

Solutions Maple : $P_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{1}{\sqrt{5}} x$;

$P_2 = -\frac{1}{5}\sqrt{5} \operatorname{arctanh} \frac{1}{5} x\sqrt{5}$;

$P_3 = -\cos(e^x)$;

$P_4 = \frac{1}{2}\tan^2 x - \frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2 x\right)$

$P_5 = -\frac{1}{2\tan^2 x} - \ln(\tan x) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2 x\right)$;

$P_6 = \left(-\frac{7}{m-1} - \frac{1}{m-1}x^2 - \frac{3}{m-1}x\right)\left(x^2+3x+7\right)^{-m}$; $P_7 = \frac{1}{2}\ln^2 x$;

Détails : $P_1 = \int \frac{dx}{x^2+5} = \int \frac{dx}{5\left[\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1\right]}$. On pose $u = \frac{x}{\sqrt{5}}$ donc $du = \frac{dx}{\sqrt{5}}$ on en déduit $P_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan u + cte = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x}{\sqrt{5}} + cte$

$P_2 = \int \frac{dx}{x^2-5}$. Décomposition en éléments simples : $\frac{1}{x^2-5} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x-\sqrt{5}} - \frac{1}{x+\sqrt{5}}\right)$ donc $P_2 = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\int \frac{dx}{x-\sqrt{5}} - \int \frac{dx}{x+\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{10}\left(\ln\left|x-\sqrt{5}\right| - \ln\left|x+\sqrt{5}\right|\right)$

$P_3 = \int e^x \sin(e^x)dx$. On pose $u = e^x$ soit $du = e^x dx$ donc $P_3 = \int \sin u du = -\cos u + cte = -\cos e^x + cte$

$P_4 = \int \tan^3 x dx$. On pose $u = \tan x$. On a $du = \frac{1}{1+(\tan x)^2}dx$ ou encore $x = \arctan u$ donc $dx = \frac{1}{1+u^2}du$. On en déduit : $P_4 = \int \frac{u^3}{1+u^2}du = \int u - \frac{u}{1+u^2}du = \frac{u^2}{2} - \ln(1+u^2) + cte = \frac{(\tan x)^2}{2} - \ln(1+\tan x^2) + cte$

$P_5 = \int \frac{dx}{\tan^3 x}$. On pose $u = \tan x$. $P_5 = \int \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{u^3}$. Décomposition en éléments simples : $\frac{1}{u^3(1+u^2)} = \frac{1}{u^3} - \frac{1}{u} + \frac{u}{1+u^2}$ donc $P_5 = \int \frac{1}{u^3} - \frac{1}{u} + \frac{u}{1+u^2}du = \frac{-1}{2u^2} - \ln|u| + \frac{\ln\left(1+u^2\right)}{2} + cte = \frac{-1}{2(\tan x)^2} - \ln|\tan x| + \frac{\ln\left(1+\tan x^2\right)}{2} + cte$

$P_6 = \int \frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^m}dx, m \in \mathbb{N}$. Il faut isoler les valeurs de m qui font changer la nature de l'intégrale :

- pour $m = 0$, on a $P_6 = \int 2x+3dx = x^2+3x+C, C \in \mathbb{R}$
- pour $m \neq 0$ a priori, on remarque que le numérateur est la dérivée du dénominateur et que $\frac{d\left(x^2+3x+7\right)^{-m+1}}{dx} = (-m+1)(2x+3)\left(x^2+3x+7\right)^{-m}$ donc on en déduit : $P_6 = \frac{1}{-m+1}\left(x^2+3x+7\right)^{-m+1} + C, C \in \mathbb{R}$ à condition que $m \neq 1$
- pour $m = 1, P_6 = \int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}dx = \ln\left|x^2+3x+7\right| + C, C \in \mathbb{R}$.

$P_7 = \int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + cte$

$P_8 = \int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^5 x} dx$. On pose $u = \operatorname{sh} x$. Alors $du = \operatorname{ch} x dx$ donc $P_8 = \int \frac{1}{u^5} du = \frac{-1}{4u^4} + cte = \frac{-1}{4(\operatorname{ch} x)^4} + cte$.

Exercice 2

Considérons l'intégrale

$$I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$$

Effectuer le changement de variable $u = \sqrt{e^x - 1}$ et calculer I (réponse $I = 2 - \pi/2$)

Détails : $u = \sqrt{e^x - 1} \iff x = \ln(1+u^2)$. On a donc $dx = \frac{2}{1+u^2}du$. $I = \int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx = 2\int_0^1 \frac{u^2}{1+u^2}dx = 2\int_0^1 1 - \frac{1}{1+u^2}dx = 2\left[u - \arctan u\right]_0^1 = 2 - \pi/2$

Exercice 3

Calculer les primitives suivantes :

$$\begin{aligned} P_1 &= \int \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt[3]{2+x}} dx, (t = \sqrt[6]{2+x}) \\ P_2 &= \int \frac{1}{((x-1)^2 - 4)^2} dx, (\operatorname{th} u = \frac{x-1}{2} \text{ ou } \coth u) \\ P_3 &= \int (\arcsin x)^2 dx \qquad P_4 = \int x^2\sqrt{1+x^3}dx \end{aligned}$$

$t = \sqrt[6]{2+x} = (2+x)^{1/6}$ donc $dt = \frac{1}{6}(2+x)^{-\frac{5}{6}}dx$ ou bien $x = t^6 - 2$ donc $dx = 6t^5dt$ d'où : $P_1 = \int \frac{1}{t^3+t^2} 6t^5 dt = 6\int \frac{t^3}{t+1}dt$. Comme $\frac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}$ on a $P_1 = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) + cte = 6\left(\frac{\sqrt{2+x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{2+x}}{2} + \sqrt[6]{2+x} - \ln\left|\sqrt[6]{2+x}+1\right|\right) + cte$.

$P_2 = \int \frac{1}{((x-1)^2-4)^2}dx = \int \frac{1}{16((\frac{x-1}{2})^2-1)^2}dx$. On pose $\operatorname{th} u = \frac{x-1}{2}$. Comme $\operatorname{th} u = \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u}$, $\operatorname{th}' u = \frac{\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u}{\operatorname{ch}^2 u} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} = 1 - \operatorname{th}^2 u$ donc $\left(1 - \operatorname{th}^2 u\right)du = \frac{1}{2}dx$ d'où $P_2 = \int \frac{1 - \operatorname{th}^2 u}{8(\operatorname{th}^2 u - 1)^2}du = -\int \frac{1}{8(\operatorname{th}^2 u - 1)}du = \int \frac{1}{8(1-\operatorname{th}^2 u)}du$. On pose $v = e^u$ (cf cours) soit $u = \ln v$ et $du = \frac{dv}{v}$. On a $P_2 = \int \frac{1}{8(1 - \frac{v^2-1}{v^2+1})}\frac{dv}{v} = \frac{1}{8}\int \frac{v^2+1}{2}\frac{dv}{v} = \frac{1}{16}\int v + \frac{1}{v}dv = \frac{1}{16}\left(\frac{v^2}{2} + \ln|v|\right) + cte = \frac{1}{16}\left(\frac{e^{2u}}{2} + \ln|e^u|\right) + cte$ et on a $u = \operatorname{argth}\frac{x-1}{2}$. Pour info, la solution Maple est $\int \frac{1}{((x-1)^2-4)^2}dx = -\frac{1}{16(1+x)} + \frac{1}{32}\ln(1+x) - \frac{1}{16(x-3)} - \frac{1}{32}\ln(x-3)$

$P_3 = \int (\arcsin x)^2 dx$. On pose $u = \arcsin x$ donc $x = \sin u$ d'où $dx = \cos u du$, soit $P_3 = \int u^2 \cos u du$. On conclut par double intégration par parties.

$P_4 = \int x^2\sqrt{1+x^3}dx = \frac{2}{9}\left(\sqrt{(1+x^3)}\right)^3$

Exercice 4

Calculer les primitives suivantes :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int (\cos x\cos 2x + \sin x \sin 3x)\, dx \qquad Q_2 = \int \cos x \sin^4 x dx \\ Q_3 &= \int \cos^6 x dx \qquad Q_4 = \int \sin^3 x \cos^2 x dx \qquad Q_5 = \int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x dx \end{aligned}$$

$Q_1 = \int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 3x)\, dx = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{6}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x$

$Q_2 = \int \cos x \sin^4 x dx = \frac{1}{5}\sin^5 x$

$Q_3 = \int \cos^6 x dx = \frac{1}{6}\cos^5 x \sin x + \frac{5}{24}\cos^3 x \sin x + \frac{5}{16}\cos x \sin x + \frac{5}{16}x$

$Q_4 = \int \sin^3 x \cos^2 x dx = -\frac{1}{5}\sin^2 x \cos^3 x - \frac{2}{15}\cos^3 x$

$Q_5 = \frac{1}{4}\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^3 x - \frac{1}{8}\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x - \frac{1}{8}x$

Exercice 5

Décomposer si nécessaire les fractions rationnelles, puis en calculer les primitives :

$$R_1 = \int \frac{4x}{(x-2)^2}dx \qquad R_2 = \int \frac{1}{x^2+x+1}dx$$
$$R_3 = \int \frac{1}{x^3+1}dx \qquad R_4 = \int \frac{x+1}{x\,(x-2)^2}dx$$

Solutions :

$\frac{4x}{(x-2)^2} = \frac{8}{(x-2)^2} + \frac{4}{x-2}$ donc $R_1 = -\frac{8}{x-2} + 4\ln(x-2) + \lambda$;

$\frac{1}{x^2+x+1}$ ne peut être décomposé sur $\mathbb{R}$ car le polynome n'admet pas de racine réelle. On utilise la forme canonique $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1\right]$. On pose $X = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$. On trouve après calculs $R_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{3} + \lambda$;

$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{3}\frac{x-2}{x^2-x+1}$ car $x^3+1 = (x+1)\left(x^2-x+1\right)$. Pour $\frac{x-2}{x^2-x+1}$ on utilise $\frac{x-2}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{3}{2}\frac{1}{x^2-x+1}$. Pour la seconde fraction on réitère une utilisation de la forme canonique. $R_3 = \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{1}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{3} + \lambda$;   :

$\frac{x+1}{x(x-2)^2} = \frac{1}{4x} + \frac{3}{2(x-2)^2} - \frac{1}{4(x-2)}$ dont on déduit immédiatement que $R_4 = \frac{1}{4}\ln x - \frac{3}{2(x-2)} - \frac{1}{4}\ln(x-2) + \lambda$

Exercice 6

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+2} \qquad I_2 = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2} \qquad I_3 = \int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x-3}dx$$
$$I_4 = \int_0^2 \frac{x}{x^4+16}dx \qquad I_5 = \int_{-2}^0 \frac{1}{x^3-7x+6}dx$$

Solutions :

$I_1 = -\frac{1}{4}i\sqrt{2}\ln\left(2+i\sqrt{2}\right) + \frac{1}{4}i\sqrt{2}\ln\left(2-i\sqrt{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$

$I_2 = 2\,\text{arctanh}\,\frac{1}{2} = \ln 3$

Le numérateur est la dérivée du dénominateur donc on a $I_3 = \left[\ln\left(x^2+x-3\right)\right]_2^3$ donc $I_3 = \ln 3$

On pose $X = x^2$ soit $dX = 2xdx$. On en déduit $I_4 = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{1}{X^2+16}dX = \frac{1}{32}\int_0^4 \frac{1}{\left(\frac{X}{4}\right)^2+1}dX = \frac{1}{8}\left[\arctan\frac{X}{4}\right]_0^4 = \frac{1}{32}\pi$

$\frac{1}{x^3-7x+6} = -\frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{5(x-2)} + \frac{1}{20(x+3)}$ donc $I_5 = -\frac{1}{5}\ln 2 + \frac{3}{10}\ln 3 = \frac{1}{10}\ln(27/4)$