INTRODUCTION AUX PROBABILITES
V-VI

Support du cours donné en 1^{re} année
par Marietta Manolessou
EISTI - Département Mathématiques

Année 2009-2010

Table des matières

Table des figures

Chapitre 5

Transformations de variables aléatoires $X \rightarrow Y = \varphi(X)$

1 Transformations

Soit $(\Omega,\ \mathcal{A})$ un espace probabilisable.
Soit X une variable aléatoire et une application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$

ou

$$\Omega \xrightarrow{\varphi(X)} \mathbb{R}.$$

On pose

$$Y = \varphi(X)$$

alors :

Proposition 1.1
Y est une variable aléatoire si et seulement si

$$\forall b \in \mathbb{R}\ \{x : \varphi(x) \leq b\} \in\ \mathcal{R}.$$

Si S_X est le support (continu ou discret) de X, alors $\varphi(S_X)$ est le support de Y.

Théorème 1.1 ($\varphi(S_X)$ discret)
Soit X une var. aléatoire discrète avec support D_X, fonction de masse p_X et une application :

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que $Y = \varphi(X)$ est une variable aléatoire.

$$\Rightarrow Y \text{ est une variable aléatoire discrète avec : support } D_Y = \varphi(D_X)$$

et fonction de masse :

$$p_Y(y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in \{\varphi(x)=y\} \cap D_X} p_X(x) & \text{si } y \in D_Y \\ 0 & \text{si } y \notin D_Y \end{cases}$$

Théorème 1.2 ($\varphi(C_X)$ discret)

Soit X une var. aléatoire continue avec support C_X et fonction de densité f_X . Soit une application :

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

telle que $Y = \varphi(X)$ est une variable aléatoire. et $\varphi(C_X)$ un ensemble discret.

$$\Rightarrow Y \text{ est une variable aléatoire discrète avec support } D_Y \subseteq \varphi(C_X)$$

et fonction de masse

$$p_Y(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\{\varphi(x)=y\}\cap C_X} f_X(x) & \text{si } y \in \varphi(C_X) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Théorème 1.3 ($\varphi(C_X)$ continu, φ monotone)

Soit X une var. aléatoire continue avec support C_X et fonction de densité f_X . Soit une application

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

fonction monotone (strictement croissante ou décroissante) et telle que :

$$Y = \varphi(X) \text{ variable aléatoire et } \qquad \varphi^{-1} = \psi$$

(l'image inverse) admet une dérivée continue,

$$\Rightarrow$$

Y est une var. aléatoire continue avec support $C_Y = \varphi(C_X)$

et fonction de densité

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin C_Y \\ f_X(\psi(y))|\psi'(y)| & \text{si } y \in C_Y \end{cases}$$

Remarque 1.1

Si la fonction n'est pas monotone, l'image inverse n'a pas de dérivée.

Théorème 1.4 (Généralisation φ pas monotone)

Soit Xune var. aléatoire continue avec support C_X et fonction de densité f_X . Soit une application :

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

telle que $\forall x \in C_X$ φ dérivable et $\varphi'(x) \neq 0$ sauf en un nombre fini de points et,

$\forall y \in \mathbb{R}$ il existe $m(y)$ points $x_1(y), x_2(y), \ldots x_m(y) \in C_X$ tels que

$$\forall\ k = 1 \ldots m(y), \varphi(x_K(y)) = y \text{ et } \varphi'(x_K(y)) \neq 0$$

ou il n'existe pas de points $x \in C_X$ tels que

$$\varphi(x) = y \text{ et } \varphi'(x) \neq 0 \text{ et on pose : } \quad m(y) = 0$$

$$\Rightarrow Y = \varphi(x) \text{est une variable aléatoire continue avec}$$

$$\text{support } C_Y = \varphi(C_X)$$

et fonction de densité

$$f_Y(y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{m(y)} f_X(x_K(y))|\varphi'(x_K(y))|^{-1} & \text{si } m(y) > 0 \\ 0 & \text{si } m(y) = 0 \end{cases}$$

2 Espérance d'une variable aléatoire transformée

Définition 2.1 Soit X une variable aléatoire $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $Y = \varphi(X)$ variable aléatoire (Variable al. transformée de X)

1. Si X discrète $E[\varphi(X)] = \sum_{x \in D_X} \varphi(x) p_X(x)$
2. Si X continue avec f_X fonction de densité $E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_X(x) dx$

Il faut assurer la convergence dans les deux cas :
existence $\Leftrightarrow$ convergence absolue de la série ou de l'intégrale au sens de Lebesgue.

Théorème 2.1
Soient : X variable aléatoire
$\varphi_1 \ldots \varphi_n$ fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\varphi_1(X) \ldots \varphi_n(X)$ sont des var. aléatoires et $E(\varphi_i(X))$ existe $\forall :\ i = 1, 2, \ldots n$

$$\Rightarrow \forall \quad a_1,\ \ldots,\ a_n \ \in \mathbb{R}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i E\left[\varphi_i(X)\right]$$

Chapitre 6

Fonctionnelle Génératrice Fonction Caractéristique

1 Fonctionnelle génératrice des moments : M_X

1 Définition et Exemple

Définition 1.1
Si $E[e^{tX}]$ *existe* $\forall\ t \in]t_1,\ t_2[$ *avec* $0 \in]t_1,\ t_2[$*, on définit l'application :*

$$\begin{array}{rl} M_X :]t_1,\ t_2[& \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto M_X(t) = E[e^{tX}]; \\ \textit{avec},\ M_X(0) = 1. & \end{array}$$

M_X est appelée fonction (ou fonctionnelle) génératrice des moments de X.
$]t_1,\ t_2[$ de longueur maximale, est appelé : intervalle de définition de M_X.

Exemple 1.1 Exemple de fonction génératrice
Soit X variable aléatoire discrète avec :
Support : $D_X = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ et fonction de masse :

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5} & \textit{si } x \in D_X \\ 0 & \textit{si } x \notin D_X \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} E\left[e^{tX}\right] & = \sum e^{tX} p_X(x) \\ & = e^{-2t}p_X(-2) + e^{-t}p_X(-1) + p_X(0) + e^t p_X(1) + e^{2t}p_X(2) \\ & \dfrac{1}{5}\left(e^{-2t} + e^{-t} + 1 + e^t + e^{2t}\right) \end{array}$$

$$\Rightarrow M_X(t) \textit{ existe } \forall\ t \in \mathbb{R}$$

2 Série entière de $M_X(t)$ et moments de X

Remarque 1.1
Souvent on calcule les moments d'une variable aléatoire
à partir de $M_X(t)$ (en prenant ses dérivées) d'après le résultat suivant :

Théorème 1.1

Soit X variable aléatoire avec :

$$M_X(t) \text{ définie pour } t \in]t_1,\ t_2[\text{ et } t_1 < 0 < t_2$$

i) Tous les moments μ_k de X existent.

ii)

$$\forall\ t \in]-s,\ s[\text{ où}, \quad 0 < s < t_0 = \min]-t_1,\ t_2[,$$

$M_X(t)$ admet un développement en série entière :

$$M_X(t) = 1 + E[X]t + \frac{E[X^2]}{2!}t^2 + \dots$$

iii) $\forall\ k \in \mathbb{N}^*$ $E\left[X^k\right] = M_X^{(k)}(0)$: dérivée n-ième de M_X au point $t = 0$

Exemple 1.2

On avait (v. exemple précédent) : $M_X(t) = \dfrac{1}{5}\left(e^{-2t} + e^{-t} + 1 + e^t + e^{2t}\right)$

$M_X^{(k)}(0) = \dfrac{1+2^k}{5}\left((-1)^k + 1\right)$ k-ième moment de X

$$\Rightarrow E\left(X^k\right) = \begin{cases} 2\dfrac{(1+2^k)}{5} & \text{si } k \text{ pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

3 Unicité de la fonction Génératrice

Théorème 1.2 (Unicité et propriétés)

Soit X et Y, deux variables aléatoires admettant les fonctions génératrices M_X, M_Y respectivement, avec : $t \in]t_1,\ t_2[$ et, $t_1 < 0 < t_2$.

$$\Rightarrow$$

i) Les variables X et Y suivent la même loi de probabilité si et seulement si :

$$\forall\ t \in]t_1,\ t_2[\quad M_X(t) = M_Y(t)$$

$$\Leftrightarrow \qquad X \text{ et } Y \text{ identiquement réparties.}$$

ii) La fonction génératrice vérifie toutes les propriétés de la transformée de Laplace (linéarité, convolution, théorème du retard etc.).

2 Fonction caractéristique Φ_X

Définition 2.1

Soit X une variable aléatoire. On définit l' application :

$$\begin{aligned} \Phi_X : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \Phi_X(\omega) = E[e^{i\omega X}] \end{aligned}$$

appelée *fonction caractéristique de X*.

1 Cas continu

Définition 2.2
Fonction caractéristique $\Leftrightarrow$ Transformée de Fourier (complexe conjuguée) de la fonction de densité :

$$\Phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f_X(x)dx \Leftrightarrow E\left[e^{i\omega X}\right] = \Phi_X(\omega)$$

Remarque 2.1 La fonction caractéristique vérifie toutes les propriétés de la transformée de Fourier.

Théorème 2.1

1. *La linéarité.*
2. *L'existence d'après Lebesgue :*
$$E\left[\left|e^{i\omega X}\right|\right] = 1 \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$
3. *Le théorème de Convolution :*
$$\Phi_{X*Y}(\omega) = \Phi_X(\omega)\Phi_Y(\omega)$$
4. *Fonction caractéristique d'une fonction linéaire :*
$$\Phi_{\lambda X}(\omega) = \Phi_X(\lambda\omega)$$
$$\Phi_{X+\alpha}(\omega) = e^{i\omega\alpha}\Phi_X(\omega)$$
5. *Dérivées à l'origine :* $\Phi_X^{(k)}(0) = \omega^k E\left[X^k\right]$

2 Cas discret

$$\Phi_X(\omega) = E\left[e^{i\omega X}\right] = \sum_{x_i \in D_X} e^{i\omega x_i} p_X(x_i)$$

Avec la fonction δ de Dirac on définit :

$$f_X(x) = \sum_{x_i} p_X(x_i)\delta(x - x_i)$$

alors on obtient que : $\Phi_X(\omega)$ est la *transformée de Fourier discrète* :

$$\begin{aligned} \Phi_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \sum p_X(x_i)\delta(x - x_i)dx \\ &= \sum_i p_X(x_i) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x}\delta(x - x_i)dx = \sum_i p_X(x_i)e^{i\omega x_i} \end{aligned}$$