INTRODUCTION AUX PROBABILITES
III

Support du cours donné en 1^{re} année

par Marietta Manolessou
EISTI - Département Mathématiques

Année 2009-2010

Table des matières

Table des figures

Chapitre 3

Variables aléatoires

1 Variables aléatoires

Définition 1.1 (Variable aléatoire)
Soit $(\Omega,\ \mathcal{A})$ *un espace probabilisable, alors l'application* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *est une variable aléatoire si :*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

$$\Leftrightarrow X : \Omega \to \mathbb{R}\ \{\omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{A} \qquad \forall A \in \mathcal{R}$$

$$\Leftrightarrow X : \Omega \to \mathbb{R}\ \ \textit{et t.q.} \quad \forall A \in \mathcal{R}, \quad X^{-1}(A) \in\ \mathcal{A}$$

Cas discret :
Toute fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire sur $(\Omega,\ \mathcal{P}(\Omega))$.

Cas continu : $(\Omega,\ \mathcal{A})$=$(\mathbb{R},\ \mathcal{R})$.
On vérifie que : Toute fonction continue $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et toute fonction monotone $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire sur $(\mathbb{R},\ \mathcal{R})$.

Exemple 1.1

Expérience aléatoire : Lancement de 2 dés équilibrés

A- variable aléatoire : $X(\omega) = x + y$ si $\{\omega = (x,\ y)\}$
$\Leftrightarrow$ {la somme des résultats sur les 2 dés}

B- variable aléatoire : $\begin{cases} Y(\omega) = x & \text{si } \omega = (x,\ 3) \\ Y(\omega) = 0 & \text{si } \omega = (x,\ y) \quad \text{et } y \neq 3 \end{cases}$
$\Leftrightarrow$la valeur du résultat sur le premier dé quand le second donne 3.

1 Espace de Probabilité induit $(\mathbb{R},\ \mathcal{R},\ P_X)$

Définition 1.2 (Probabilité $P_X\,[A]$)
Soit $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ un espace de probabilité.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}; \quad \forall A \in \mathcal{R} \quad P_X\,[A] = P\,[\{X \in A\}] \quad \Leftrightarrow P\,[\{\omega : X(\omega) \in A\}]$$
$$\Leftrightarrow P\left[X^{-1}\,[A]\right]$$

Théorème 1.1

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *espace de probabilité.*
Si X *variable aléatoire sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *alors* $P_X[A] = P[\{X \in A\}] \equiv P\left[X^{-1}[A]\right]$ *est une mesure de probabilité.*

Définition 1.3 ("Loi de probabilité de X")

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace de probabilité. X variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$
$\Rightarrow$ ***espace de probabilité induit*** *par la variable aléatoire* X : $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, P_X)$ *où* P_X :

$$\forall A \in \mathcal{R} \quad P_X[A] = P[\{\omega : X(\omega) \in A\}]$$

2 Exemples

Exemple 1.2 (Expérience de 2 dés)

$$\Omega = \{(i, j), \ i = 1 \ldots 6, \ j = 1 \ldots 6\}$$
$$card\Omega = 36$$
$$P[\{\omega\}] = \frac{1}{36} \quad \forall \omega \in \Omega$$
$$X = x + y \quad x = 1 \ldots 6, \ y = 1 \ldots 6$$

$$\begin{array}{ll}
P_X[\{12\}] & = P[\{\omega : X(\omega) = 12\}] \\
 & = P[\{(6, 6)\}] \\
 & = \frac{1}{36} \\
P_X[\,]8, 9[\,] & = P[\{\omega : 8 < X(\omega) < 9\}] \\
 & = P[\emptyset] \\
 & = 0 \\
P_X[\,[4, 8[\,] & = P[\{\omega : 4 \leq X(\omega) < 8\}] \\
 & = P[\{(1,3), (3,1), (2,2), (1,4), (4,1), (2,3), (3,2), (5,1), (1,5), \\
 & (2,4), (4,2), (3,3), (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\}] \\
 & = \frac{18}{36} \\
 & = \frac{1}{2} \\
P_X[\,[11, +\infty[\,] & = P[\{\omega : 11 \leq X(\omega) < +\infty\}] \\
 & = P[\{(5,6), (6,5), (6,6)\}] \\
 & = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}
\end{array}$$

Exemple 1.3 (Expérience aléatoire (chaîne de production))

Classifier : pièce défectueuse (d) ou pièce acceptable (a).

$$\Omega = \{a, d\} \quad (\Omega, P[\Omega], P) \quad \begin{array}{l} P[\{a\}] = p \quad \textit{associée à la pièce acceptable } (0 < p < 1) \\ P[\{d\}] = 1 - p \textit{ associée à la pièce défectueuse} \end{array}$$

Variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$

$$X(a) = 1; \quad X(d) = 0 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} P_X[1] & = P[\{a\}] & = p \\ P_X[0] & = P[\{d\}] & = 1 - p \end{array} \right.$$

2 Fonction de répartition-Fonction de masse

Définition 2.1 *Fonction de répartition d'une variable aléatoire*

Remarque : On a la même définition dans le cas discret ou le cas continu.
Soit $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathcal{P})$
Soit X, une variable aléatoire sur $(\Omega,\ \mathcal{A})$
Soit $(\mathbb{R},\ \mathcal{R},\ P_X)$ espace de probabilité induit par la variable aléatoire X
On définit la fonction F_X appelée *fonction de répartition,* $\forall\, X \in \mathbb{R}$:

$$F_X(x) = P_X[]-\infty,\ x]] = P[\{X \leq x\}]$$

Définition 2.2 *Fonction de masse d'une variable aléatoire*

Soit X, une variable aléatoire sur $(\Omega,\ \mathcal{A})$
Soit $(\mathbb{R},\ \mathcal{R},\ P_X)$ espace de probabilité induit par la variable aléatoire X
On définit la fonction p_X appelée *fonction de masse,*
$\forall\, X \in \mathbb{R}$:

$$p_X(x) = P_X[\{x\}] = P[\{X = x\}]$$

On définit aussi :

$$\begin{cases} p_X(-\infty) = P_X[\{-\infty\}] = 0 \\ p_X(+\infty) = P_X[\{+\infty\}] = 0 \end{cases}$$

Exemple 2.1

On considère l'expérience de la classification des pièces défectueuses ou non. On obtient la fonction de répartition suivante :

$$\begin{cases} F_X(x) = P_X[]-\infty,\ x]] & = 0 & \text{si } x < 0 \\ & = 1-p & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ & = 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

et la fonction de masse suivante :

$$\begin{cases} p_X(x) & = 1-p & \text{si } x = 0 \\ & = p & \text{si } x = 1 \\ & = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Théorème 2.1

Soit $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathcal{P})$
Soit X*, une variable aléatoire sur* $(\Omega,\ \mathcal{A})$
Soit $(\mathbb{R},\ \mathcal{R},\ P_X)$*, un espace de probabilité induit par la variable aléatoire* X
Soit $p_X(x)$*, la fonction de masse et soit* $F_X(x)$*, la fonction de répartition*

1. $P_X[]a,\ b]] = F_X(b) - F_X(a)$
2. $P_X[]a,\ b[] = F_X(b) - F_X(a) - p_X[b]$
3. $P_X[[a,\ b[] = F_X(b) - F_X(a) + p_X[a] - p_X[b]$
4. $P_X[[a,\ b]] = F_X(b) - F_X(a) + p_X[a]$
5. $P_X[]a,\ +\infty[] = 1 - F_X(a)$
6. $P_X][a,\ +\infty[] = 1 - F_X(a) + p_X[a]$
7. $P_X[]-\infty,\ b[] = F_X(b) - p_X[b]$

Théorème 2.2
Soit $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathcal{P})$
Soit X*, une variable aléatoire sur* $(\Omega,\ \mathcal{A})$
Soit $(\mathbb{R},\ \mathcal{R},\ P_X)$*, un espace de probabilité induit par la variable aléatoire* X
Soit $p_X(x)$*, la fonction de masse et* $F_X(x)$*, la fonction de répartition*

$$\text{alors} \rightarrow \begin{cases} \bullet\ 0 \leq F_X(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \bullet\ F_X \text{ est non décroissante} \\ \bullet\ \lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1 \\ \bullet\ F_X \text{ est continue à droite (mais pas forcément continue à gauche)} \\ \bullet\ \lim\limits_{\substack{y \to x \\ y < x}} F_X(y) = F_X(x) - p_X(x) \end{cases}$$

1 Cas discret

Rappel :

$$p_X(x) = F_X(x) - \lim_{\substack{y \to x \\ y < x}} F_X(y)$$

Remarque 2.1
Si $p_X(x) \neq 0$*,* F_X *est discontinue en* x *et* p_X *représente la "hauteur du saut" de* F_X *en* x.

Théorème 2.3
Soit X *une variable aléatoire avec fonction de masse* p_X*. L'ensemble :*

$$D_X = \{x : p_X(x) > 0\}$$

est discret.

Définition 2.3
Soit $(\Omega, \mathcal{A},\ \mathcal{P})$
Soit X*, une variable aléatoire sur* $(\Omega,\ \mathcal{A})$ *avec* $(\mathbb{R},\ \mathcal{R},\ P_X)$ *espace de probabilité induit par la variable aléatoire* X
Soit p_X*, sa fonction de masse*
X *est une* ***variable aléatoire discrète ssi*** *:*

1. $\{x : p_X(x) > 0\} \equiv D_X \neq \emptyset$
2. $\sum\limits_{x \in D_X} p_X(x) = 1$

D_X est appelé ***support*** *de la variable aléatoire discrète*

Exemple 2.2 L'exemple du test des pièces défectueuses et acceptables est un exemple de variable aléatoire discrète avec $\Omega = \{a,\ d\}$, $D_X = \{0,\ 1\}$, $P[\{a\}] = p$, $P[\{d\}] = 1 - p$:
$\sum\limits_{x \in D_X} p_X(x) = p_X(0) + p_X(1) = 1 - p + p = 1$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - p & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Exemple 2.3

Soit X une variable aléatoire ayant pour fonction de répartition F_X où :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

F_X est continue et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad D_X = \emptyset$. Donc X n'est pas une variable aléatoire discrète.

Exemple 2.4

Soit X une variable aléatoire ayant comme fonction de répartition F_X où :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1+x}{4} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$D_X = \{0,\ 1\}$$

$$\sum_{x \in D_X} p_X(x) = p_X(0) + p_X(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \neq 1$$

$$\Rightarrow$$

X n'est pas une variable aléatoire discrète.

Théorème 2.4

Soit $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathcal{P})$
Soit X*, une variable aléatoire discrète sur* $(\Omega,\ \mathcal{A})$
Soit $p_X(x)$*, la fonction de masse et* D_X*, le support*

$$\forall B \in \mathcal{R}\ P_X[\{X \in B\}] = \begin{cases} 0 & \textit{si } B \cap D_X = \emptyset \\ \displaystyle\sum_{x \in B \cap D_X} p_X(x) & \textit{si } B \cap D_X \neq \emptyset \end{cases}$$

Remarques sur les variables aléatoires discrètes :

Comment construire une variable aléatoire discrète
Données :

1. Un sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}$ discret
2. Une application $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} p(x) = 0 & \forall x \notin D \\ p(x) > 0 & \forall x \in D \\ \displaystyle\sum_{x \in D} p(x) = 1 \end{cases}$
3. Définir :

   $$\forall\, B\ \in \mathcal{R}, \quad p_X[\{X \in B\}] = \sum_{x \in B \cap D} p(x)$$

   avec :

   $$\sum_{x \in B \cap D} p(x) = 0 \quad \text{si } B \cap D = \emptyset$$

2 Cas continu

Théorème 2.5
Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$*, un espace probabilisable*
Une mesure de probabilité P *est déterminée d'une façon unique par ses valeurs sur les intervalles* $]-\infty, x]$ *(boréliens)*

Définition 2.4 (Fonction de densité de probabilité)
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de densité si :

* $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
* f admet au plus un nombre fini de discontinuités quelque soit l'intervalle fini de $\mathbb{R}$
* f intégrable (au sens de Lebesgue) et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Définition 2.5 (Support C_X d'une variable aléatoire continue X)
$C_X = \{x : f(x) > 0\}$

Remarque 2.2 *Détermination de* $F_X(x)$ *étant donnée* f_X *:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P_X[]-\infty, x]] = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Théorème 2.6
Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$*, un espace probabilisable*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, une fonction de densité.*
Si l'application $P : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ *est définie par :*

$$\forall \ A \in \mathcal{R}, \ P[A] = \int_A f(x)dx$$

(au sens de Lebesgue),
alors P *est une mesure de probabilité sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$

Définition 2.6
Une variable est dite continue si $\forall x \in \mathbb{R}$, sa fonction de répartition est donnée par : $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$ (au sens de Lebesgue) avec f_X, fonction de densité.

Exemple 2.5
Soit X une variable aléatoire ayant comme fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \ \lambda \in \mathbb{R}^{+*} \end{cases}$$

On vérifie que f_X est une fonction de densité
On remarque que cette fonction est continue partout, dérivable partout sauf en 0 et $F'_X = f_X(x)$ pour $x \neq 0$

Théorème 2.7

Soit X variable aléatoire continue avec $C_X \neq \emptyset$, f_X et F_X (fonction de densité et de répartition) et F_X continue alors :

$$\begin{cases} \bullet \textit{ Si } f_X \textit{ continue en } x \textit{ alors } F_X \textit{ dérivable en } x \textit{ et } F'_X(x) = f_X(x) \\ \bullet\, D_X = \{x | p_X(x) > 0\} = \emptyset \quad (P_X(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}) \\ \bullet\, \forall I \subset \mathbb{R}, \quad P[\{X \in I\}] = \displaystyle\int_I f_X(x)dx \\ \bullet\, \forall A \in \mathcal{R}, \quad P[\{X \in A\}] = \displaystyle\int_{A \cap C_X} f_X(x)dx \end{cases}$$

Théorème 2.8

Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie :

1. *F est non décroissante*
2. *F est continue à droite*
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0 \ \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

et si on définit G par :

$$G[] - \infty,\ x]] = F[x] \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

alors G est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R},\ R)$ et F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire ayant G comme loi de probabilité.

Conclusion 1 : Détermination d'une var. al. continue X à partir de f_X

* C_X intervalle de $\mathbb{R}$ (support de X)

* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que :

- $f(x) > 0$ si $x \in C_X$
- $f(x) = 0$ si $x \notin C_X$
- f admet un nombre fini de discontinuités sur chaque intervalle fini de $\mathbb{R}$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (f intégrable)
- $P[\{X \in B\}] = \displaystyle\int_B f(x)dx = \int_{B \cap C_X} f(x)dx \ \forall x \in \mathcal{R}$

Conclusion 2 : Détermination d'une var. al. continue X à partir de F_X

Pour vérifier que X est une variable aléatoire continue (étant donnée F_X), il faut que la dérivée F'_X vérifie les propriétés suivantes :

1. F'_X existe sauf en, au plus, un nombre fini de points
2. $F'_X \geq 0$
3. F'_X continue sur chaque intervalle où elle est définie
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F'_X(x)dx = 1$

Chapitre 4

Espérance mathématique -Variance

1 Espérance ou moyenne $E[X]$

(autres notations) :

$$E[X] = \mu_X = m_X$$

1 Espérance Mathématique (Cas : Discret et Continu)

Définition 1.1
Soit $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathcal{P})$ et X une variable aléatoire sur $(\Omega,\ \mathcal{A})$

a. *Espérance mathématique $E[X]$ d'une var. aléatoire discrète :*
Soit D_X le support et p_X la fonction de masse de X alors :

$$E[X] = \sum_{x \in D_X} x p_X$$

b. *Espérance mathématique $E[X]$ d'une var. aléatoire continue :*
Soit C_X le support et f_X la fonction de densité de X alors :

$$E[X] = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

Remarque 1.1

1. Souvent la valeur de l'espérance n' appartient pas au support de la variable aléatoire
2. Pour le cas discret, l'espérance est équivalente à la moyenne arithmétique des valeurs de X pondérées par leur probabilité
3. L'existence de $E[X]$ (ou μ_X) est équivalente à l'étude de la convergence absolue de la série ou de l'intégrale au sens de Lebesgue.
4. *Interprétation physique de la moyenne dans le cas discret :*
   On a pour exemples :
   a) le centre de gravité des corps matériels ;
   b) la distribution de probabilité en moyenne - pour les bactéries en biologie ;
   c) appels téléphoniques ou pannes dans la vie courante.

5. *Interprétation physique de la moyenne dans le cas continu :*
   – Moyenne de densité de probabilité de présence des particules, ou de densité de probabilité des niveaux d'énergie en mécanique quantique.
   – Temps moyen d'attente devant les guichets d'une banque , d'une poste etc.., temps moyen d'attente de fichiers dans une imprimante etc...
   – Temps moyen d'attente avant la première panne d'un appareil, etc...

2 Moments d'une variable

Définition 1.2 (Moment d'une variable aléatoire)
On définit : $\mu'_k = E[X^k]$ appelé $k^{ième}$ *moment de la variable aléatoire X par rapport à l'origine.*

Définition 1.3
On définit : $\mu_k = E[(X - \mu_X)^k]$ appelé $k^{ième}$ *moment de la variable aléatoire X par rapport à la moyenne μ_X.*

Remarque 1.2
1. *pour* $k = 1$ $\mu'_1 = \mu_X = E[X]$
2. *pour* $k = 1$ $\mu_1 = E[(X - \mu_X)] = \mu_X - \mu_X = 0$
3. $\mu_2 = E[(X - \mu_X)^2]$. *Interprétation physique : Moment d'inertie.*
4. *Si* $\forall x \in D_X$ *(ou si* $\forall x \in C_X$*)* $x = C$ *(constante réelle) alors :*

$$E[C] = \sum_{x \in D_X} x p_X(x) = \sum_{x \in D_X} C p_X(x) = C \sum_{x \in D_X} p_X(x) = C$$

ou,

$$E[C] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} C f_X(x) dx = C \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = C.$$

2 Variance

Définition 2.1 (Variance σ_X^2 et écart-type σ_X)
Soit X variable aléatoire. On appelle *variance de* X le moment :

$$\mu_2 = E[(X - \mu_X)^2] = var[X] = \sigma_X^2$$

Écart-type de X : $\sqrt{\sigma_X^2} = \sigma_X$

Remarque 2.1

1. μ_X (la moyenne ou espérance) est une mesure de localisation pour la var. aléatoire X.
2. σ_X^2 est une mesure de dispersion pour la var. aléatoire X.
3. $\sigma_X^2 > \sigma_Y^2 \Leftrightarrow$ le support de la variable aléatoire X est plus dispersé que celui de Y (au sens de la loi de probabilité).

Théorème 2.1
Si X variable aléatoire de variance σ_X^2

$$\Rightarrow \sigma_X^2 = \mu_2' - \mu_X^2$$

ou

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2 = E[X^2] - E^2[X]$$

Théorème 2.2
Soit X variable aléatoire de moyenne μ_X et de variance σ_X^2.
Définissons la var. aléatoire $Y = aX + b \quad (a,\ b \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \mu_Y = a\mu_X + b \qquad \text{et} \qquad \sigma_Y^2 = a^2\sigma_X^2$$

(linéarité de l'espérance et non-linéarité de la variance)

Démonstration :

$$\mu_Y = E[Y] = E[aX + b] = E[aX] + E[b] = aE[X] + b = a\mu_X + b$$

et

$$\sigma_Y^2 = E[Y^2] - E^2[Y] = E[a^2X^2 + b^2 + 2abX] - a^2\mu_X^2 - b^2 - 2ab\mu_X = a^2\sigma_X^2$$

Théorème 2.3
Soit X variable aléatoire de moyenne μ_X et de variance $\sigma_X^2 \neq 0$, si

$$Y = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

$\Rightarrow$

$$\mu_Y = 0; \quad \sigma_Y^2 = 1$$

Y est appelée variable aléatoire centrée réduite.

Démonstration :

Par application du théorème précédent (avec $a = \dfrac{1}{\sigma_X}$ et $b = \dfrac{-\mu_X}{\sigma_X}$) on écrit :

$$E[Y] = E[\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}] = \frac{1}{\sigma_X}(\mu_X - \mu_X) = 0$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2} = 1$$