INTRODUCTION AUX PROBABILITES
II

Support du cours donné en 1^{re} année
par Marietta Manolessou
EISTI - Département Mathématiques

Année 2009-2010

Table des matières

Table des figures

Chapitre 2

Probabilité conditionnelle et indépendance

1 Probabilité Conditionnelle

1 Définitions-Propriétés

Définition 1.1 *(déf. préliminaire pour le cas discret d'un modèle uniforme)* Probabilité conditionnelle ou "Probabilité que A se réalise sachant que l'événement B s'est réalisé".

$$P[A \mid B] = \frac{n_{A\cap B}}{n_B}$$

Exemple 1.1 (les boules...) 5 boules dans une urne dont 3 rouges et 2 bleues.
On tire 2 boules (sans remise) (et sans regarder la première).
$A = \left\{\text{la } 2^{\text{ème}} \text{ boule est rouge}\right\}$.

Si au 1^{er} tirage la boule est rouge $P_1\left[A\right] = \dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{2}{4}\right)$
Si au 1^{er} tirage la boule est bleue $P_2\left[A\right] = \dfrac{3}{4}$

Exemple 1.2 (Skieur...)
A représente l'événement d'au moins une chute par descente et B l'événement de descentes sur une piste rouge.
$n_{A\cap B}$ représente le nombre de descentes avec une chute au moins sur une piste rouge.
n_B représente le nombre de descentes sur une piste rouge.
$P[A \mid B]$ représente la probabilité d'une chute au moins par descente en skiant sur les pistes rouges ; d'après le modèle uniforme :

$$P[A \mid B] = \frac{n_{A\cap B}}{n_B}$$

En divisant par n (nombre total de descentes, i.e $card\Omega$) on aura une autre définition :

$$P[A \mid B] = \frac{n_{A\cap B/n}}{n_{B/n}} = \frac{P\left[A\cap B\right]}{P\left[B\right]}$$

Définition 1.2

$$P[A \mid B] == \frac{P\left[A \cap B\right]}{P\left[B\right]} = P\left[A\right]_B = P_B\left[A\right]$$

Exemple 1.3 (Boules (suite))

$\Omega = \{\text{couples ordonnés}\} \Rightarrow card\Omega = A_5^2 = \dfrac{5!}{3!} = 20$

Si $B = \left\{1^{\text{ère}} \text{ boule rouge}\right\}$ alors $\begin{cases} cardB = 3 \times 4 = 12 \\ cardA \cap B = 2 \times 3 = 6 \\ P[A \mid B] = \frac{\frac{6}{20}}{\frac{12}{20}} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Si $B = \left\{1^{\text{ère}} \text{ boule bleue}\right\}$ alors $\begin{cases} cardB = 2 \times 4 = 8 \\ cardA \cap B = 2 \times 3 = 6 \\ P[A \mid B] = \frac{\frac{6}{20}}{\frac{8}{20}} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

Définition 1.3 *Définition générale de la probabilité conditionnelle*

Soit $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ un espace probabilisé et $B \in \mathcal{A}$ avec $P[B] > 0$.
L'espace de probabilité conditionnelle par rapport à B pour tout modèle est donné par $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P_B)$ avec :

$$P_B = P[A \mid B] = \frac{P\left[A \cap B\right]}{P[B]}$$

Attention : Pour établir cette définition, il a fallu montrer d'abord que $P_B\left[A\right]$ est bien une mesure de probabilité.

Théorème 1.1

Soit $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ un espace de probabilité et $B \in \mathcal{A}$ avec $P\left[B\right] > 0$

* *Si $B \subseteq A$ et $A \in \mathcal{A}$, alors $P[A \mid B] = 1$*
* *Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\quad P[A \cap B] = P[A \mid B] \times P\left[B\right]$ (loi de multiplication)*
* *Si $0 < P\left[B\right] < 1, alors \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad P\left[A\right] = P[A \mid B] \times P\left[B\right] + P\left[A \mid B^c\right] \times P\left[B^c\right]$*

Théorème 1.2 ("Loi de multiplication généralisée")

Si $\{B_i\}_{i=1\ldots n} \subset \mathcal{A}$ avec $P\left[B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1}\right] > 0$ alors :

$$P\left[\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right] = P\left[B_n \left| \bigcap_{i=1}^{n-1} B_i\right.\right] \times P\left[B_{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^{n-2} B_i\right.\right] \times \cdots \times P\left[B_2 \left| B_1\right.\right] \times P\left[B_1\right]$$

2 Formule de Bayes

Problème :

Si on n'a pas d'information nécessaire pour évaluer $P[A]$,
Si pour $\{B_1 \ldots B_n\} \subset \mathcal{A}$ (partition de Ω),
on connaît $P[A|B_i]\,\forall i = 1\ldots n$, on connaît $P[B_i]\,\forall i = 1\ldots n$
alors comment faire pour trouver $P[A]$ et $P[B_i|\,A]\,\forall i = 1\ldots n$?

Théorème 1.3

Soit : $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P), \{B_1 \ldots B_n\}$*, une partition de* Ω *avec :*
$B_i \in \mathcal{A}$ *et* $P[B_i] > 0 \quad \forall\, i = 1\ldots n$

$$\Longrightarrow \qquad \forall A \in \mathcal{A} \quad P[A] = \sum_{i=1}^{n} P[A|B_i] \times P[B_i]$$

Preuve

$$\begin{aligned} P[A] &= P[A \cap \Omega] \\ &= P\left[A \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_i\right] \\ &= P\left[\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} P[A \cap B_i] \\ &= \sum_{i=1}^{n} P[A|B_i] \times P[B_i] \end{aligned}$$

Théorème 1.4 (Formule de Bayes)

Avec les mêmes conditions qu'au théorème 1.3, on a :

$$P[B_i|\,A] = \frac{P[A|B_i] \times P[B_i]}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} P[A|B_j] \times P[B_j]} = \frac{P[A \cap B_i]}{P[A]}$$

2 Indépendance

1 Evénements indépendants

Définition 2.1

Soit $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$.
A et $B \in \mathcal{A}$ sont **indépendants** ou **stochastiquement indépendants**, **ssi** :

$$P[A \cap B] = P[A] \times P[B]$$

(autrement : $P[A \mid B] = P[A]$).
Si $P[A \cap B] \neq P[A] \times P[B]$ alors on dit que, A et B sont **dépendants** ou **liés**.

Attention :

Ne pas confondre, **événements indépendants** et événements mutuellement exclusifs.

Exemple 2.1

Pour montrer que la notion de l'indépendance n'est pas une notion intuitive : on lance une pièce de monnaie 3 fois.

$$\Omega = \{(\Pi, \Pi, \Pi), \ (\Pi, \Pi, F), \ (\Pi, F, \Pi), \ (\Pi, F, F), \ (F, \Pi, \Pi), \ (F, \Pi, F), \ (F, F, \Pi), \ (F, F, F)\}$$

$A = \{$"Pile à chacun des deux premiers lancers"$\}$
$B = \{$"Pile au troisième lancer"$\}$
$C = \{$"au moins deux piles"$\}$
D'après le modèle uniforme $card\Omega = 2^3$

$$\left.\begin{array}{c} P[A] = \dfrac{2}{8} \quad P[B] = \dfrac{4}{8} \quad P[C] = \dfrac{4}{8} \\ P[A \cap B] = P(\{\Pi, \Pi, \Pi\}) = \dfrac{1}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow A, \ B \text{ indépendants}$$

$$P[A \cap C] = \frac{1}{4} \neq P[A] \times P[C] = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow A, \ C \text{ dépendants}$$

$$P[B \cap C] = \frac{3}{8} \neq P[B] \times P[C] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow B, \ C \text{ dépendants}$$

Théorème 2.1

Soit $(\Omega, \ \mathcal{A}, \ P)$ un espace probabilisé, et supposons que $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ soient deux événements indépendants : $P[A \cap B] = P[A] \times P[B]$ alors :

1. *A et B^c sont indépendants*

Preuve *:*

$$P[A \cap B^c] = P[A] - P[A \cap B] = P[A] \times (1 - P[B]) = P[A] \times P[B^c]$$

2. *A^c et B sont indépendants*

Preuve *:*

$$P[A^c \cap B] = P[B] - P[A \cap B] = P[B] \times (1 - P[A]) = P[A^c] \times P[B]$$

3. *A^c et B^c sont indépendants*

Preuve *:*

$$P[A^c \cap B^c] = P[A^c] - P[A^c \cap B] = P[A^c] \times (1 - P[B]) = P[A^c] \times P[B^c]$$

2 Familles indépendantes

Définition 2.2

Soit $(\Omega, \ \mathcal{A}, \ P)$ et soient deux familles d'événements $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$

*Alors $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont indépendantes, **ssi***

$$\forall A_i \in \mathcal{A}_1 \textit{ et } A_j \in \mathcal{A}_2, \ A_i \textit{ et } A_j \textit{sont indépendants} \Leftrightarrow P[A_i \cap A_j] = P[A_i] \times P[A_j]$$

Définition 2.3

Soit $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ et $\{A_1,\ \ldots,\ A_n\} \subset \mathcal{A}$.
Les $A_1,\ \ldots,\ A_n$ sont **mutuellement indépendants ssi**

$$P\left[\bigcap_{i=1}^{l} A_{\alpha i}\right] = \prod_{i=1}^{l} P\left[A_{\alpha i}\right],$$

pour toute sous-famille $\{A_{\alpha 1},\ \ldots,\ A_{\alpha l}\}$ de $\{A_{\alpha 1},\ \ldots,\ A_{\alpha n}\}$.

Remarque 2.1

L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux mais la réciproque est fausse.

3 Expériences indépendantes⇒ espaces produits

Expériences de BERNOUILLI (ou suites de BERNOUILLI) :

Une suite de n épreuves de Bernouilli[1] est une succession de n épreuves indépendantes à deux issues possibles : succès ou échec. $p_s = p, \quad p_e = 1 - p_s = q$

Exemple 2.2

- N lancers d'un dé (on veut par exemple $\{6\}$)
- N tirages d'une boule blanche dans une urne avec remise.
- On lance la roue n fois. Soit p la probabilité d'obtenir le secteur rouge (succès) et q la probabilité pour un échec. On cherche la probabilité pour gagner k fois. On a le :

Théorème 2.2

Pour une suite de n épreuves de BERNOUILLI, la probabilité d'obtenir k succès $P(k)$ au cours de n épreuves est :

$$P\left[k\right] = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

(Vérification que P est une mesure de probabilité) :

$$P\left[k\right] \geq 0; \qquad P\left[\Omega\right] = \sum_{k=1}^{n} P\left[k\right] = \sum_{k=1}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$$

4 Indépendance pour un exemple cas continu

Exemple 2.3

On choisit au hasard un nombre dans $[0,\ 1]$

Rappel :

Espace de probabilité : *$(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ avec $\Omega = [0,\ 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{R}\left[0,\ 1\right]$ et $P\left[A\right] = \int_A dx \quad \forall A \in \mathcal{R}$.*

---

[1] J. BERNOUILLI 1654-1705 Mathématicien suisse parmi les premiers à étudier ce problème

Pour les événements $A = \left[0,\ \frac{1}{2}\right]$, $\quad B = \left[\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right]$, $\quad C = \left[\frac{3}{8},\ \frac{7}{8}\right]$

$$\left.\begin{array}{r}P\left[A\right] = \int_0^{\frac{1}{2}} 1.dx = \frac{1}{2} \\ P\left[B\right] = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} 1.dx = \frac{1}{2} \\ P\left[A \cap B\right] = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 1.dx = \frac{1}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow A \textit{ et } B \textit{ indépendants}$$

$$\left.\begin{array}{r}P\left[C\right] = \int_{\frac{3}{8}}^{\frac{7}{8}} 1.dx = \frac{1}{2} \\ P\left[A \cap C\right] = \int_{\frac{3}{8}}^{\frac{4}{8}} 1.dx = \frac{1}{8}\end{array}\right\} \Rightarrow A \textit{ et } C \textit{ dépendants}$$

$$P\left[B \cap C\right] = \int_{\frac{3}{8}}^{\frac{6}{8}} 1.dx = \frac{3}{8} \quad \Rightarrow B \textit{ et } C \textit{ dépendants}$$