INTRODUCTION AUX PROBABILITES
I

Support du cours donné en 1^{re} année

par Marietta Manolessou
EISTI - Département Mathématiques

Année 2009-2010

Table des matières

Table des figures

Chapitre 1

Probabilités

1 Bibliographie

* "Initialisation aux probabilités" par Sheldon M. Ross
  édition : Press Univers. et Polytechniques Romandes Diffusion
* "Probabilités Modernes et Pratiques" par J.-C. Radix
  Edition : Tec et doc
* "Introduction aux probabilités" par P. Bremaud
  Edition : Springer et Verlog
* "Probabilités : Théorie et Application" par Y. Caumel
  Edition : Eyrolles
* "An introduction to probability theory and its applications" - volume 1 - par W. Feller
  Edition : Wiley International Edition
* "Schaum Series - Lipschutz"
  Edition : Murray Spiegel
* "Exercices in probability" par I. Cacoullos
  Edition : Springer -Verlag
* "Probabilités : Exercices corrigés et rappels de cours" par J.-P. Lecoutre
  Edition : Masson
* "Exercices ordinaires de probabilités" par G. Frugier
  Edition : Ellipses

2 Aperçu historique

* FERMAT 1601-1665
* PASCAL 1623-1662
* LAPLACE 1749-1827
* GAUSS 1777-1855
* Aux XVII$^{\text{ème}}$, XVIII$^{\text{ème}}$ et XIX$^{\text{ème}}$ siècles, les phénomènes aléatoires dans le cadre des jeux étaient étudiés.
* $P(A) = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{n(N)}{N}$ $\quad n$: fréquence de réalisations d'un événement A; N : nombre d'expériences
* KOLMOGOROV 1933 Pour la première fois, il donne une définition rigoureuse des probabilités en partant des théorèmes d'intégration et de la mesure de LEBESGUE et BOREL.

3 Introduction

1 Tribus -cours de Maths.- Analyse II

Rappel :

Une tribu (ou σ - algèbre) sur Ω est une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de Ω telle que :

* Ω et $\emptyset$ sont dans $\mathcal{F}$.
* Si $A \in \mathcal{F}$ alors $A^c \in \mathcal{F}$
* Si $A_n \in \mathcal{F}$ $(n \geq 1)$, alors $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ (stabilité par union dénombrable)

Exemple 3.1 ***La tribu de Borel*** $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ En théorie de Probabilités, la façon la plus courante pour définir une tribu est la suivante : on sélectionne une famille $\mathcal{C}$ de sous-ensembles de Ω que l'on juge intéressante (pour une raison ou une autre), et on définit la tribu $\mathcal{T}$ sur Ω comme étant la plus petite tribu contenant tous les ensembles dans C.

Ainsi sur $\mathbb{R}$, on définit la tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, comme étant la plus petite tribu qui contient les intervalles fermés $[a, b]$ où $-\infty < a < b < +\infty$. Avec la topologie habituelle, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu $\mathcal{D}$ engendré par **l'ensemble $\mathcal{D}$ des demi- droites** $(]-\infty, \alpha[$ ou $]-\infty, \alpha])$ ou par **l'ensemble des intervalles**.

2 Propriétés des fonctions mesurables -cours de Maths.- Analyse II

Rappels

- i. Si, sur un ensemble Ω, on définit une tribu $\mathcal{T}$ alors on dit que $(\Omega, \mathcal{T})$ est un espace mesurable et les parties de Ω sont des ensembles mesurables de Ω si elles appartiennent à $\mathcal{T}$.
- ii. Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable et Y un espace topologique. On dit qu'une application $f : \Omega \to Y$ est mesurable si l'image réciproque par f de tout ouvert $A \in \mathcal{O}_Y$ de Y (où $\mathcal{O}_Y \equiv$ la famille des ouverts de Y) est un ensemble mesurable

3 Mesures -cours de Maths.- Analyse II

4 Ensemble de mesure nulle -cours de Maths.-Analyse II

5 Phénomène aléatoire

6 Espace échantillon

4 Evénement

Evénement certain :

Ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire représenté par Ω (parfois dénommé univers des possibilités, univers, espace échantillon ou espace fondamental).

Evénement :

Toute partie de Ω, tout résultat possible est un événement.

Evénements mutuellement exclusifs :

Deux événements A et B sont mutuellement exclusifs quand leur intersection est vide : $A \cap B = \emptyset$.

Evénements élémentaires :

Ils sont représentés en général par $\{\omega\}$.
Ils sont par définition mutuellement exclusifs.
Ils ne peuvent pas s'exprimer comme union d'autres événements de Ω.
Ils constituent une partition de Ω : $\Omega = \bigcup_i \{\omega_i\}\ \omega_i \cap \omega_j = \emptyset$.
Tout événement de Ω est union d'une partie de la famille des événements élémentaires.

Evénement impossible :

Autre nom de l'événement vide.

Classe d'événements intéressants :

Tribu

Exemple 4.1 (Expérience du dé)

$\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$
$i = 1 \ldots 6\ \omega_i = \{i\}$
$A = \{\omega_1\} \cup \{\omega_4\}$ tribu engendrée par A : $\mathcal{A}_A = \{\Omega,\ \emptyset,\ A,\ A^c\}$

5 Mesures de probabilité

Définition 5.1

Soit $(\Omega,\ \mathcal{A})$ un espace mesurable, on appelle ***mesure de probabilité*** *une fonction $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :*

1 - $P(A) \geq 0\ \forall A \in \mathcal{A}$.

2 - $P(\Omega) = 1$.

3 - $\forall \{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *famille dénombrable d'événements mutuellement exclusifs :*

$$A_i \in \mathcal{A} \quad \forall\ i \in\ \mathbb{N} \quad \textit{et} \quad A_i \cap A_j = \emptyset\ \forall\, i \neq j$$

$$\Rightarrow \qquad P\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} P\left(A_i\right)$$

Remarque 5.1

* P est une mesure positive particulière car :

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

* A une expérience aléatoire, on associe : Ω, $\mathcal{A}$(tribu), P(mesure de probabilité).
Le triplet : $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ est appelé **espace de probabilité P ou espace probabilisé.**

6 Propriétés de la mesure de probabilité

Soit $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ un espace de probabilité alors les propriétés suivantes sont vérifiées par P :

Théorème 6.1

$$P(\emptyset) = 0$$

Théorème 6.2

$$\left.\begin{array}{c}\forall n\in\mathbb{N},\ n<\infty\\ \forall\, i\neq j,\ (i,j,)\in\{0,\,1\,\ldots\,n\}^2\\ A_i,\ A_j\in\mathcal{A}\quad \textit{et}\quad A_i\cap A_j=\emptyset\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad P\left(\bigcup_{i=0}^{n}A_i\right)=\sum_{i=0}^{n}P\left(A_i\right)$$

Théorème 6.3

$$\forall A\in\mathcal{A}\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}P(A)=1-P\left(A^c\right)\\ 0\leq P(A)\leq 1\end{array}\right.$$

Théorème 6.4

$$\begin{array}{rl}\forall A,\ B\in\mathcal{A} & \Rightarrow\ P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\\ \textit{et si}\ \ B\subseteq A & \Rightarrow\ P(A-B)=P(A)-P(B)\end{array}$$

Théorème 6.5

$$\forall A,\ B\in\mathcal{A}\quad\Rightarrow\ P\left(A\cup B\right)=P(A)+P(B)-P\left(A\cap B\right)$$

Théorème 6.6
Soit $\{C_1,\ \ldots,\ C_n\}$ *partition de* Ω *avec :*

$$C_i\in\mathcal{A}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n}C_i=\Omega\\ \forall i\neq j\ C_i\cap C_j=\emptyset\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\quad\forall A\in\mathcal{A}\quad P(A)=\sum_{i=1}^{n}P\left(A\cap C_i\right)$$

Théorème 6.7

$$\left.\begin{array}{c}\forall A,\ B\in\mathcal{A}\\ B\subseteq A\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\ P(B)\leq P(A)$$

Théorème 6.8 (Inégalité de BOOLE)
$\forall$ *suite finie ou dénombrable* $\left\{A_i\right\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{A}$

$$\Rightarrow\ P\left(\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i\right)\leq\sum_{i=0}^{\infty}P\left(A_i\right)$$

Théorème 6.9

$$\forall\ \textit{suite finie ou dénombrable}\ \left\{A_i\right\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{A}\qquad\Rightarrow\ P\left(\bigcap_{i=0}^{\infty}A_i\right)\geq 1-\sum_{i=0}^{\infty}P\left(A_i^c\right)$$

7 Construction d'un espace de probabiité $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$

1 Cas discret ou dénombrable

Théorème 7.1

Soient Ω espace - échantillon discret, $\mathcal{A}$ tribu, et une mesure de probabilité sur $(\Omega,\ \mathcal{A})$ $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$, alors :

1 - $\forall \omega \in \Omega \quad P(\{\omega\}) \geq 0$ *et* $\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1.$

2 - $P(\emptyset) = 0.$

3 - $\forall A \in \mathcal{A}$ *et* $A \neq \emptyset \quad P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$

Etapes de la méthode :

1 - Déterminer l'espace des événements élémentaires (Espace échantillon) Ω, $\Omega = \bigcup_{\omega \in \Omega} (\omega)$

2 - Construire la tribu $\mathcal{A}$ des événements intéressants
Souvent on considère l'ensemble des parties de l'espace échantillon $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

3 - Se donner la mesure P vérifiant les trois points du théorème 7.1 :

$$\begin{cases} P(\Omega) = P\left(\bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1 \\ \forall \omega \in \Omega, \quad P(\{\omega\}) \geq 0 \\ P(\emptyset) = 0 \\ \forall A \in \mathcal{A} \text{ et } A \neq \emptyset, \quad P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) \end{cases}$$

2 Modèle uniforme

$(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ espace probabilisé discret (Ω fini)

Définition 7.1 (Mesure de probabilité uniforme) *Les événements élémentaires $\omega \in \Omega$ ont la même chance de se réaliser :*

$$\Omega = \{\omega_1,\ \ldots,\ \omega_N\} \quad \forall i = 1 \ldots N\ \exists k \in [0,\ 1] \quad P(\{\omega_i\}) = k$$

Remarque 7.1 (Détermination de k)

Comme $1 = P(\Omega) = \sum_{i=1}^{N} P(\{\omega_i\}) = N \times k$ on a $k = P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N} = \frac{1}{card\Omega}$

Propriété 7.1

Soit $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ espace probabilisé discret fini avec P mesure de probabilité uniforme $P(A) = \frac{cardA}{card\Omega}$

Remarque 7.2

* Le problème revient à dénombrer les événements élémentaires de Ω (cas possibles) et les événements élémentaires de A (cas favorables).
* Attention : l'équiprobabilité n'est pas toujours vraie.
* Cette hypothèse ne peut pas être vérifiée mathématiquement en théorie des probabilités. Ce problème relève des études statistiques.

8 Analyse combinatoire

Définition 8.1
p-uplet (ou p-liste) : $(z_1,\ \ldots,\ z_p)$
$2p$-listes sont identiques $(z_1,\ \ldots,\ z_p)$ $(z'_1,\ \ldots,\ z'_p)$ **ssi** $\forall i = 1 \ldots p \quad z_i = z'_i$ (éléments identiques et dans le même ordre).

Définition 8.2
Produit cartésien : $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_p$ $(x_1,\ \ldots,\ x_p) \in \Omega$ (p-liste) $i = 1 \ldots p\ x_i \in \Omega_i$

Principe fondamental de l'analyse combinatoire :

$$card\Omega = \prod_{i=1}^{p} card\Omega_i \text{ avec } \Omega = \{(z_1,\ \ldots,\ z_p)\,/\, i = 1 \ldots p,\ z_i \in \Omega_i\} = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_p$$

1 Arrangements avec répétition ou p-listes

Définition 8.3
Ensemble d'arrangements avec répétition (p-**listes**) de p éléments parmi n :
Dispositions ordonnées de p éléments parmi n avec répétition possible d'un ou plusieurs éléments p-uplets possibles.

Théorème 8.1

$$card\left(\{p\text{-listes de } n \text{ éléments}\}\right) = n^p$$

2 Arrangements sans répétition

Définition 8.4
Ensemble d'arrangements sans répétition (ou Arrangement) :
Dispositions ordonnées de p éléments parmi n sans répétition.

Théorème 8.2 *Cardinal des Arrangements*

$$A_n^p(\text{ou } (n)_p) = n(n-1)\ldots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ avec } p \leq n$$

3 Permutations

Notation : ϖ.

Définition 8.5
Ensemble de **permutations sans répétition**
Arrangements de n éléments parmi n éléments distincts

Théorème 8.3

$$card\varpi = cardA_n^n = n!$$

4 Permutations avec répétition

Définition 8.6
Ensemble de **permutations avec répétition (ou partitions)** de n éléments divisés en k groupes distincts d'éléments identiques (dispositions ordonnées).

Théorème 8.4

$$card\,(\varpi_n)^{n_1\ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!\ldots n_k!} = \left(\begin{array}{c} n \\ n_1\ldots n_k \end{array}\right)$$

5 Combinaisons

Définition 8.7
Ensemble de **combinaisons sans répétition** (ou combinaisons)
Dispositions non ordonnées et sans répétition de p éléments parmi n

Exemple 8.1
$\Omega_0 = \{a,\ b,\ c\}$
$n = 3,\ p = 2 \Rightarrow 3$ combinaisons : $(a,\ b),\ (a,\ c),\ (b,\ c)$

Notation :

$$\left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array}\right) \text{ ou } C_n^p$$

Identité :

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

Théorème 8.5

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Remarque 8.1

C_n^p est un cas particulier d'une partition (**permutation avec répétition**) d'un ensemble de n éléments en 2 groupes de p et de $(n-p)$ éléments.

6 Combinaisons avec répétition

Définition 8.8

Ensemble de **combinaisons avec répétition** : p éléments parmi n éléments distincts
Dispositions non ordonnées de p éléments parmi n avec répétition possible

Exemple 8.2

$\Omega_0 = \{a,\ b,\ c\}$
$n = 3,\ p = 2 \Rightarrow (a,\ a),\ (a,\ b),\ (a,\ c),\ (b,\ b),\ (b,\ c),\ (c,\ c)$

Remarque 8.2

p peut être supérieur à n.

Pour le dénombrement : **problème d'occupation**.
n cellules distinctes, p boules identiques

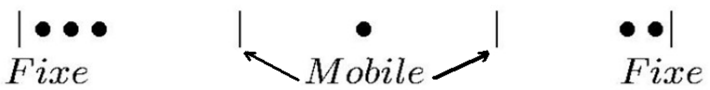

FIG. 1.1 – $n = 3,\ p = 6$

Exemple 8.3 *(v.figure 1.1)*

$n = 3,\ p = 6 \Rightarrow$ Combinaisons avec répétition de p éléments parmi n éléments. Si on a n cellules, on a $(n-1)$ cloisons mobiles. On fait le dénombrement de toutes les combinaisons possibles de $(n+p-1)$ éléments en deux sous-groupes :

* l'un contenant $(n-1)$ éléments (cloisons) ;
* l'autre contenant p éléments (boules).

$$card\omega = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)!p!} = \begin{pmatrix} n+p-1 \\ p \end{pmatrix} = C_{n+p-1}^p$$

Cardinalité des espaces échantillons pour le modèle de l'urne et le problème d'occupation :

Tirage de N éléments parmi M éléments distincts (modèle de l'urne)			
Tirage	Avec ordre	Sans ordre	
Sans remise	$(M)_N = A_M^N$	$\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} = C_M^N$	Sans répétition
Avec remise	M^N	$\begin{pmatrix} M+N-1 \\ N \end{pmatrix} = C_{M+N-1}^N$	Avec répétition
	Boules distinctes	Boules identiques	Distribution
	Distribution de N boules dans M cellules distinctes (problème d'occupation)		

9 Construction d'un espace de probabilité $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ Cas Continu

Cas particulier (et le plus intéressant).

$\Omega = \mathbb{R}$

1. $\Omega = \mathbb{R}$

2. $\mathcal{A} = \mathcal{R}$ (ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$)

Rappel :

$\mathcal{R}$ contient tous les intervalles et les points isolés de $\mathbb{R}$

$\mathcal{R}_A$: tribu des boréliens associée à l'événement $A \in \mathcal{R}$

3. Pour définir P, on a le théorème suivant :

Théorème 9.1

Soit P une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R},\ \mathcal{R})$. Alors P est déterminée de façon unique par ses valeurs sur les intervalles du type

$$]-\infty,\ x] \quad \text{où} \quad x \in \mathbb{R}$$

Théorème 9.2

Soit $(\mathbb{R},\ \mathcal{R})$, $f : \mathbb{R} \to \mathcal{R}$ tel que :

1. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

2. *f admet au plus un nombre fini de discontinuités sur chaque intervalle fini de $\mathbb{R}$.*

3. *f est intégrable (au sens de Lebesgue) et*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Si $P : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$P[A] = \int_A f(x)dx \quad \forall A \in \mathcal{R}$$

alors P est une mesure de probabilité.

On obtient ainsi $(\Omega,\ \mathcal{R},\ P)$. On appellera f :
fonction de densité.

Preuve du théorème 9.2

La propriété 1 de la définition d'une mesure de probabilité est vérifiée car

$$P[A] = \int_A f(x)dx \geq 0.$$

La propriété 2 est aussi vérifiée car

$$P[\mathbb{R}] = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

La propriété 3 est aussi vérifiée car si $A_1 \dots A_n$ est une suite décroissante d'événements mutuellement exclusifs, il nous faut montrer que :

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i].$$

En effet,

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} f(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f(x)dx.$$

Propriétés vraies pour toute famille d'ensembles mesurables donc boréliens (et tels que $A_i \cap A_j = \emptyset$) **ssi** f est intégrable sur A_i $\forall i \in \mathbb{N}$.

Remarque 9.1

$\forall [a,\ b] \subset \mathbb{R} \quad P([a,\ b]) = \int_a^b f(x)dx$

$\forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow \{y\} \in \mathcal{R}$ et $\Rightarrow P[\{y\}] = \int_{\{y\}} f(x)dx = 0$

Si $A \in \mathcal{R}$ est fini ou infini dénombrable $\Rightarrow P[A] = 0$.

Le théorème 9.2 s'applique aussi dans le cas où Ω est un intervalle de $\mathbb{R}$. Il suffit de prendre $f(x) = 0\ \forall x \notin \Omega$ et $\int_\Omega f(x)dx = 1$.

Conclusion (Comparaison)

Cas discret	**Cas continu**
$(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$	$(\mathbb{R},\ \mathcal{R},\ P)$ avec f fonction de densité
$P[\Omega] = 1$	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
$\forall A \in \mathcal{A} \quad P[A] \geq 0$	$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$P[A] = \sum_{\omega \in A} P[\{\omega\}]$	$P[A] = \int_A f(x)dx \quad \forall A \in \mathcal{R}$

Exemple 9.1

Durée de service d'une pièce d'équipement $\Omega = [0,\ +\infty[$ (ou $\Omega = \mathbb{R}^+$) avec :

$$\begin{array}{lll} f : \mathbb{R} & \to \mathbb{R} & \\ f(x) & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \text{ et } \lambda > 0 \end{cases} \end{array}$$

On voit que toutes les conditions du théorème 9.2 sont vérifiées :
$f(x) \geq 0$ et f continue sauf pour $x = 0$, et comme $\lambda > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx = -\left[e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = 1$$

$$\text{et } \forall A \in \mathcal{R} \quad P[A] = \int_{A \cap [A,\ +\infty[} \lambda e^{-\lambda x}dx$$

On cherche la probabilité de l'événement A : “la durée de service supérieure à y heures”.

$$P[A] = \int_y^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx = e^{-\lambda y}$$

Exemple 9.2

Espace de probabilité pour l'expérience aléatoire : choisir au hasard un nombre sur l'intervalle $[0,\ 1]$. On définit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

f vérifie le théorème 9.2 car
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 1.dx = 1$ et $\quad \forall A \in \mathcal{R} \quad P\left[A\right] = \int_{A\cap[0,\ 1]} 1.dx;$
$P\left([a,\ b]\right) = \displaystyle\int_a^b 1.dx = b - a$ est la probabilité pour que le nombre choisi soit dans $\left[a,\ b\right]$.