



Devoir surveillé

Exercice 1

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$

2. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$

3. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$

Exercice 2

Trouver les solutions $(x(t), y(t))$ du système différentiel sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + y(t) \end{cases}$$

avec les conditions initiales $\begin{cases} x(0) = 8 \\ y(0) = 3 \end{cases}$

Exercice 3

On considère la fonction f , impaire, de période 2π , égale à $\pi - x$ pour $0 < x < \pi$.

1. Représenter graphiquement la fonction f
2. Donner le développement en série de Fourier de f
3. Etudier la convergence de ce développement en tout point $x \in \mathbb{R}$
4. En déduire la valeur de la somme

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$