Ing1 2007-2008
Remise à niveau - ANALYSE

Session de rattrapage

Merci de rédiger l'Algèbre et l'Analyse sur deux copies séparées.

Exercice 1 (extrait du concours CCP, filière PSI, 2002)
On désigne par :

- E la fonction partie entière,
- I l'intervalle $]0, +\infty[$,
- $\mathcal{A}$ l'ensemble des applications continues par morceaux de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient la condition : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|f(t)| \leq t$

Si $f \in \mathcal{A}$ et $x \in I$, on considère

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-xt} f(t) dt$$

Le but de cet exercice est l'étude de quelques propriétés de F.

1. Etude préliminaire

   Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on considère les fonctions u_n et v_n définies par

   $$u_n(x) = e^{-nx} \text{ et } v_n(x) = ne^{-nx}$$

   On introduit les séries de termes généraux $u_n(x)$ et $v_n(x)$ qui convergent pour tout choix de $x \in I$.
   On note désormais pour tout $x \in I$

   $$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \text{ et } h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$$

   (a) Déterminer la fonction g sous forme d'une fonction usuelle.

   (b) Montrer que l'on a pour tout $x \in I$:

   $$(1 - e^{-x})h(x) = g(x) - 1$$

   (c) En déduire que la fonction h s'exprime par :

   $$h(x) = \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}$$

2. Une étude de $\mathcal{A}$

   (a) On considère la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_0(t) = t$
   Montrer que si $x \in I$ alors l'application $t \mapsto e^{-xt} f_0(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

   (b) Expliciter $F_0(x) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-xt} f_0(t) dt$

(c) Vérifier que si $f \in \mathcal{A}$ et si $x \in I$, alors la fonction $\varphi_x : t \mapsto e^{-xt} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

.

Ainsi lorsque $f \in \mathcal{A}$, la fonction $F : x \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} e^{-xt} f(t) dt$ est bien définie sur I et on note désormais

$$F = \mathcal{L}(f)$$

1.

3. Exemple 1 : fonction partie entière

   On considère dans cette question la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_1(t) = E(t)$

   (a) Vérifier que la fonction f_1 appartient à l'ensemble $\mathcal{A}$

   (b) Montrer que la fonction $F_1 = \mathcal{L}(f_1)$ peut s'exprimer à l'aide de l'une des deux fonctions g et h, et expliciter $F_1(x)$ pour tout $x \in I$.

4. Exemple 2

   On considère dans cette question la fonction f_2 définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_2(t) = E(t) + (t - E(t))^2$$

   et soit $F_2 = \mathcal{L}(f_2)$.

   (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$0 \leq [t - E(t)]^2 \leq t - E(t)$$

   (b) En déduire que la fonction f_2 appartient à l'ensemble $\mathcal{A}$

   (c) Expliciter $F_2(x)$ pour $x \in I$..

Exercice 2

On considère la fonction f de période 2π, définie par

$$f(t) = |t| \text{ pour tout } t \in]-\pi, \pi]$$

1. Représenter graphiquement la fonction f
2. Donner le développement en série de Fourier de f
3. Etudier la convergence de ce développement en tout point $x \in \mathbb{R}$
4. En déduire la valeur des sommes

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \text{ et } S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$