Département Mathématique
ING1 - Année scolaire 2009 - 2010

Remise à niveau

Algèbre linéaire & Analyse

Professeur : Muriel Duloué
Heures d'enseignement : 35 heures

Septembre - Octobre 2009

Résumé

L'objectif de cette remise à niveau est de présenter les résultats de base dédiés à l'algèbre linéaire et à l'analyse. Ces prérequis sont indispensables pour la compréhension des matières en mathématique de la $1^{ère}$ année du cycle ingénieur. Tout investissement dans cette remise à niveau portera très rapidement ses fruits. A bon entendeur, salut.

Attitude à bannir

Table des matières

Partie I

ALGEBRE LINEAIRE

1 Quelques exercices de révision sur les nombres complexes

1.1 Forme algébrique, forme trigonométrique et forme exponentielle d'un nombre complexe

Exercice 1 : Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $\frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}$.

Réponse : Il s'agit ici seulement de mener du calcul :

$$\begin{aligned}\frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i} &= \frac{(2+5i)(1+i)+(2-5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)},\\ &= \frac{2+2i+5i-5+2-2i-5i-5}{1-i^2},\\ &= \frac{2-5+2-5}{2}=\frac{-6}{2}=-3.\end{aligned}$$

Le nombre complexe $\frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}$ a comme partie réelle -3 et 0 comme partie imaginaire. Il s'agit donc du nombre réel -3. ■

Exercice 2 :

On note $z_1 = 2\sqrt{6}\,(1+i)$ et $z_2=\sqrt{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$.

1. Déterminer les formes trigonométrique et exponentielle des deux nombres complexes z_1 et z_2.

2. Déterminer la forme algébrique de $z=\frac{z_1}{z_2}$.

3. Déterminer les formes trigonométrique et exponentielle de z.

4. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$. ■

Réponse :

1.

$$|z_1| = 2\sqrt{6}\sqrt{1^2+1^2} = 2\sqrt{6}\sqrt{2} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$$

et

$$|z_2| = \sqrt{2}\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{2}.$$

Par conséquent, il s'ensuit les expressions trigonométriques suivantes des deux nombres complexes z_1 et z_2 d'une part puis les expressions exponentielles :

$$\begin{aligned} z_1 &= 4\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \\ z_2 &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

car

$$\boxed{z_1 = 4\sqrt{3}\left(\frac{2\sqrt{6}\,(1+i)}{4\sqrt{3}}\right) = 4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}\,(1+i)}{2}\right)}$$

et

$$\boxed{z_2 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}\,(1+i\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}$$

et donc

$$\boxed{z_1 = 4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}.}$$

2. On a successivement :

$$\begin{aligned} z &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{6}\,(1+i)}{\sqrt{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)} = \frac{\sqrt{12}\,(1+i)}{\left(1+i\sqrt{3}\right)} = 2\sqrt{3}\frac{(1+i)\left(1-i\sqrt{3}\right)}{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)}, \\ &= 2\sqrt{3}\frac{(1+i)\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1+3} = \frac{\sqrt{3}}{2}(1+i)\left(1-i\sqrt{3}\right), \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-i\sqrt{3}+i+\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\sqrt{3}+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right) \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{z = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\sqrt{3}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\sqrt{3}\right).}$$

3. Ainsi,

$$\boxed{z = \frac{4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{6}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{6}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}}$$

puis

$$\boxed{z = \sqrt{6}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) = \sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right).}$$

4. On a simultanément

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\sqrt{3}+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)$$

et
$$z=\sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$
Identifions les parties réelle et imaginaire de ce nombre complexe
$$\begin{aligned}\sqrt{6}\cos\frac{\pi}{12} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\\ -\sqrt{6}\sin\frac{\pi}{12} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)\end{aligned}$$
soit
$$\boxed{\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}\left(1+\sqrt{3}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right),}$$
$$\boxed{\sin\frac{\pi}{12}=-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}\left(1-\sqrt{3}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{3}\right).\ \blacksquare}$$

<u>Exercice 3 :</u> Soit z un nombre complexe différent de 1 et de module 1.

1. Démontrer que $Z=i\dfrac{1+z}{1-z}$ est réel.

2. Déterminer Z en fonction de la valeur θ de l'argument de z comprise entre 0 et 2π.$\blacksquare$

<u>Réponse :</u>

1. Pour démontrer que Z est un nombre réel, on va vérifier que Z est égal à son conjugué. Dans les faits, on a puisque z est différent de 1 :
$$\overline{Z}=\overline{i\frac{1+z}{1-z}}=\overline{i}\,\overline{\frac{1+z}{1-z}}=(-i)\,\frac{1+\overline{z}}{1+\overline{(-z)}}=(-i)\,\frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}}=(-i)\,\frac{z\left(1+\overline{z}\right)}{z\left(1-\overline{z}\right)}$$
$$\overline{Z}=(-i)\,\frac{z+z\overline{z}}{z-z\overline{z}}=(-i)\,\frac{z+|z|^2}{z-|z|^2}=(-i)\,\frac{z+1}{z-1}=i\frac{1+z}{1-z}=Z,$$
ce qui est le résultat escompté.

2. z étant de module 1 et différent de 1, θ est différent de 0 et de 2π soit $\theta\in\left]0,2\pi\right[$. On écrit :
$$z=e^{i\theta}$$
et ainsi
$$Z=i\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}=i\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}=i\frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}},$$

$$\begin{aligned} Z &= \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}}{2} \frac{2i}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}, \\ &= \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}}{2} \left(-\frac{2i}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} \right) = \cos\frac{\theta}{2} \left(-\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} \right). \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{Z = -\cot an \frac{\theta}{2}. \ \blacksquare}$$

Exercice 4 : Soient z et z' deux nombres complexes.
1. Montrer que

$$\mathrm{Re}\,(z) = |z|$$

si et seulement si z est réel positif ou nul.
2. A quelle condition a-t-on :

$$|z + z'| = |z| + |z'|? \ \blacksquare$$

Réponse :
1. On utilise ici la forme algébrique du nombre complexe z

$$z = x + iy$$

avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,(z) &= |z| \Longleftrightarrow x = \sqrt{x^2 + y^2} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x^2 = x^2 + y^2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ 0 = y^2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ceci peut se traduire par la propriété suivante :

$$\boxed{\mathrm{Re}\,(z) = |z| \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}_+.}$$

2. $|z + z'|$ et $|z| + |z'|$ étant deux nombres réels positifs, on a l'équivalence suivante :

$$|z + z'| = |z| + |z'| \Longleftrightarrow |z + z'|^2 = (|z| + |z'|)^2.$$

Le point de départ maintenant est l'égalité $|z+z'|^2 = (|z|+|z'|)^2$. On écrit successivement les équivalences suivantes :

$$|z+z'|^2 = (|z|+|z'|)^2 \Longleftrightarrow (z+z')\left(\overline{z+z'}\right) = |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'|,$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad (z+z')\left(\overline{z}+\overline{z'}\right) = |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'|, \\
&\Longleftrightarrow \quad z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} = |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'|, \\
&\Longleftrightarrow \quad |z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + z'\overline{z} = |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'|, \\
&\Longleftrightarrow \quad z\overline{z'} + z'\overline{z} = 2|z||z'|, \\
&\Longleftrightarrow \quad z\overline{z'} + \overline{z}z' = 2|z|\left|\overline{z'}\right|, \\
&\Longleftrightarrow \quad z\overline{z'} + \overline{z}z' = 2\left|z\overline{z'}\right|.
\end{aligned}$$

On pose maintenant $Z = z\overline{z'} \in \mathbb{C}$ et par conséquent

$$|z+z'|^2 = (|z|+|z'|)^2 \Longleftrightarrow Z + \overline{Z} = 2|Z|$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad 2\,\mathrm{Re}\,(Z) = 2|Z| \Longleftrightarrow \mathrm{Re}\,(Z) = |Z| \\
&\Longleftrightarrow \quad Z \in \mathbb{R}_+.
\end{aligned}$$

En résumé,

$$|z+z'| = |z| + |z'| \Longleftrightarrow z\overline{z'} \in \mathbb{R}_+.$$

Regardons maintenant ce qu'induit la propriété $z\overline{z'} \in \mathbb{R}_+$. On peut affirmer si $z = 0$ ou $z' = 0$ alors $z\overline{z'} \in \mathbb{R}_+$. Plaçons-nous à présent dans le cas où $z \neq 0$ et $z' \neq 0$. On dispose alors des équivalences suivantes :

$$z\overline{z'} \in \mathbb{R}_+^* \Longleftrightarrow \arg\left(z\overline{z'}\right) = 0 \Longleftrightarrow \arg(z) - \arg(z') = 0 \Longleftrightarrow \arg(z) = \arg(z').$$

En conclusion finale,

$$\boxed{|z+z'| = |z| + |z'| \Longleftrightarrow z = 0 \text{ ou } z' = 0 \text{ ou } \arg(z) = \arg(z'). \ \blacksquare}$$

Exercice 5 : Soient a et b deux nombres réels donnés. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

1. $|z| + z = a + ib$.
2. $|z| - z = a + ib$ ■

Réponse :

1. On a :

$$|z| + z = a + ib \Longleftrightarrow |z| + \mathrm{Re}\,(z) + i\,\mathrm{Im}\,(z) = a + ib \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |z| + \mathrm{Re}\,(z) = a, \\ \mathrm{Im}\,(z) = b \end{array}\right. .$$

De plus, on sait que :

$$|z| \geq |\mathrm{Re}\,(z)|$$

et donc

$$|z| + \mathrm{Re}\,(z) \geq \mathrm{Re}\,(z) + |\mathrm{Re}\,(z)|$$

soit

$$|z| + \mathrm{Re}\,(z) \geq 0.$$

Ainsi, si $a < 0$ alors $S = \varnothing$. De plus, si $a = 0$ alors

$$|z| + z = a + ib \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |z| = -\mathrm{Re}\,(z)\,, \\ \mathrm{Im}\,(z) = b \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Re}\,(z) \text{ est réel négatif,} \\ \mathrm{Im}\,(z) = b. \end{array} \right.$$

De ce fait, toujours sous la condition $a = 0$, il vient que si $b \neq 0$ alors $S = \varnothing$ et si $b = 0$ alors $z \in \mathbb{R}_-$. Il reste maintenant à étudier le dernier cas $a > 0$. Posons à cette fin $x = \mathrm{Re}\,(z)$ et $y = \mathrm{Im}\,(z)$ et écrivons tout à tour

$$|z| + z = a + ib \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2 + y^2} = a - x, \\ y = b \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = (a - x)^2\,, \\ a - x \geq 0, \\ y = b \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = x^2 + a^2 - 2ax, \\ a - x \geq 0, \\ y = b \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y^2 = a^2 - 2ax, \\ a - x \geq 0, \\ y = b \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{a^2 - y^2}{2a}, \\ a - x \geq 0, \\ y = b \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{a^2 - y^2}{2a}, \\ y = b \end{array} \right.$$

car

$$a - x = a - \frac{a^2 - y^2}{2a} = \frac{2a^2 - a^2 + y^2}{2a} = \frac{a^2 + y^2}{2a} = \frac{a^2 + b^2}{2a} > 0.$$

En conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet \text{ si } a < 0 \text{ ou } (a = 0 \text{ et } b \neq 0) \text{ alors } S = \varnothing, \\ \bullet \text{ si } a = 0 \text{ et } b = 0 \text{ alors } z \in \mathbb{R}_-, \\ \bullet \text{ si } a > 0 \text{ alors } S = \left\{ \dfrac{a^2 - b^2}{2a} + ib \right\}. \end{array}}$$

2. Effectuons tout d'abord une opération qui puisse nous permettre d'exploiter directement la question précédente. En posant $z' = -z$

$$|z| - z = a + ib \Longleftrightarrow |z'| + z' = a + ib.$$

Il s'ensuit immédiatement que :

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet \text{ si } a < 0 \text{ ou } (a = 0 \text{ et } b \neq 0) \text{ alors } S = \varnothing, \\ \bullet \text{ si } a = 0 \text{ et } b = 0 \text{ alors } z \in \mathbb{R}_+, \\ \bullet \text{ si } a > 0 \text{ alors } S = \left\{ -\dfrac{a^2 - b^2}{2a} - ib \right\}. \blacksquare \end{array}}$$

1.2 Formule de Moivre et formule d'Euler

Exercice 1 : Linéariser $\cos^5 x$ et $\sin^5 x$ où x désigne un nombre réel. ■

Réponse :

On utilise ici la formule d'Euler et les propriétés de l'exponentielle complexe. Plus précisément, on a :

$$\begin{aligned}
\cos^5 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^5, \\
&= \frac{1}{32}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^2\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^2\left(e^{ix}+e^{-ix}\right), \\
&= \frac{1}{32}\left(e^{i2x}+e^{-i2x}+2\right)\left(e^{i2x}+e^{-i2x}+2\right)\left(e^{ix}+e^{-ix}\right).
\end{aligned}$$

Le développement du calcul conduit à :

$$\begin{aligned}
\cos^5 x &= \frac{1}{32}\left(\begin{array}{l} e^{i4x}+1+2e^{i2x}+1+e^{-i4x} \\ +2e^{-i2x}+2e^{i2x}+2e^{-i2x}+4 \end{array}\right)\left(e^{ix}+e^{-ix}\right), \\
&= \frac{1}{32}\left(e^{i4x}+6+4e^{i2x}+e^{-i4x}+4e^{-i2x}\right)\left(e^{ix}+e^{-ix}\right), \\
&= \frac{1}{32}\left(\begin{array}{l} e^{i5x}+e^{i3x}+6e^{ix}+6e^{-ix}+4e^{i3x} \\ +4e^{ix}+e^{-i3x}+e^{-i5x}+4e^{-ix}+4e^{-i3x} \end{array}\right), \\
&= \frac{1}{32}\left(e^{i5x}+10e^{ix}+10e^{-ix}+5e^{i3x}+e^{-i5x}+5e^{-i3x}\right), \\
&= \frac{1}{16}\left(\left(\frac{e^{i5x}+e^{-i5x}}{2}\right)+10\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)+5\left(\frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\cos^5 x = \frac{1}{16}\left(\cos(5x)+5\cos(3x)+10\cos x\right).}$$

On peut linéariser de la même manière $\sin^5 x$ en utilisant la formule

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

On peut également pour faciliter les calculs utiliser le fait suivant :

$$\sin^5 x = \cos^5\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

Il suffit donc maintenant d'exploiter la formule établie précédemment. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
\sin^5 x &= \frac{1}{16}\left(\cos\left(5\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)+5\cos\left(3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)+10\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right), \\
&= \frac{1}{16}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{2}-5x\right)+5\cos\left(\frac{3\pi}{2}-3x\right)+10\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right), \\
&= \frac{1}{16}\left(\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-5x\right)+5\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{2}-3x\right)+10\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right), \\
&= \frac{1}{16}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)+5\cos\left(-\frac{\pi}{2}-3x\right)+10\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right), \\
&= \frac{1}{16}\left(-\sin\left(-5x\right)+5\cos\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)-10\sin\left(-x\right)\right).
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\sin^5 x = \frac{1}{16}\left(\sin\left(5x\right)-5\sin\left(3x\right)+10\sin\left(x\right)\right).\ \blacksquare}$$

<u>Exercice 2 :</u> n est un élément fixé de $\mathbb{N}^*$.
1. Déterminer les formes trigonométrique et exponentielle de $(1+i)^n$.
2. Pour quelles valeurs de l'entier n, $(1+i)^n$ est-il réel?
3. On note S_n la somme des $(-1)^k \mathrm{C}_n^{2k}$ avec $0 \leq 2k \leq n$ et T_n la somme des $(-1)^k \mathrm{C}_n^{2k+1}$ avec $0 \leq 2k+1 \leq n$. Calculer S_n et T_n en fonction de n. <u>Indication :</u> on pourra exprimer $(1+i)^n$ en fonction de S_n et T_n. $\blacksquare$

<u>Réponse :</u>
1. Déterminons le module et l'argument du nombre complexe $1+i$. On a :

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

de sorte que :

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

On déduit alors directement de la formule de Moivre l'égalité suivante :

$$\boxed{(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}}.} \qquad (1)$$

2. Il en découle l'information que $(1+i)^n$ est un réel si et seulement si

$$n\frac{\pi}{4} = k\pi$$

avec $k \in \mathbb{Z}$ soit

$$n = 4k,$$

k décrivant l'ensemble $\mathbb{Z}$.

3. On exploite ici la formule du binôme à savoir

$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{C}_n^k i^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{C}_n^k i^k.$$

Regardons maintenant d'un peu plus près les puissances successives de i :

$$\begin{array}{rcl} i^0 & = & 1, \\ i^1 & = & i, \\ i^2 & = & -1, \\ i^3 & = & -i, \\ i^4 & = & 1, \\ i^5 & = & i, \\ i^6 & = & i^2 = -1 \\ & & \ldots \end{array}$$

et par conséquent on peut déduire les différents cas suivants :

$$i^k = \begin{cases} 1 \text{ si } k = 4k' \text{ avec } k' \in \mathbb{Z}, \\ i \text{ si } k = 1 + 4k'' \text{ avec } k'' \in \mathbb{Z}, \\ -1 \text{ si } k = 2 + 4k''' \text{ avec } k''' \in \mathbb{Z}, \\ -i \text{ si } k = 3 + 4k'''' \text{ avec } k'''' \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

On peut alors vérifier que l'égalité suivante est tout à fait correcte :

$$(1+i)^n = S_n + iT_n$$

et en utilisant (1) une identification des parties réelle et imaginaire conduit à :

$$\boxed{S_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)}$$

puis

$$\boxed{T_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right). \ \blacksquare}$$

1.3 Racines n-ièmes

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)\,.\ \blacksquare$$

Réponse : On écrit le nombre complexe $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$ sous sa forme exponentielle

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Ensuite, on pose $z = \rho e^{i\theta}$ et il vient :

$$z^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i) \Leftrightarrow \rho^4 e^{i4\theta} = e^{i\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \rho^4 = 1, \\ 4\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \rho = 1 \text{ car } \rho \geq 0, \\ \theta = \frac{3\pi}{16} + k\frac{\pi}{2} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Faisons décrire à k l'ensemble $\mathbb{Z}$

$$\frac{3\pi}{16}$$

$$\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi}{2} = \frac{11\pi}{16}$$

$$\frac{3\pi}{16} + 2\frac{\pi}{2} = \frac{19\pi}{16}$$

$$\frac{3\pi}{16} + 3\frac{\pi}{2} = \frac{27\pi}{16}$$

$$\frac{3\pi}{16} + 4\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16} + 2\pi$$

...

D'où le résultat final suivant :

$$\boxed{S = \left\{\frac{3\pi}{16}, \frac{11\pi}{16}, \frac{19\pi}{16}, \frac{27\pi}{16}\right\}.\ \blacksquare}$$

1.4 Résolution dans $\mathbb{C}$ d'une équation du second degré

<u>Exercice 1 :</u> Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - (3+4i)\,z - 1 + 5i = 0.\blacksquare$$

<u>Réponse :</u>

On a à résoudre ici une équation du second degré dans $\mathbb{C}$. Appliquons la théorie dédiée à ce cas de figure. On définit le discriminant

$$\begin{aligned}\Delta &= (-(3+4i))^2 - 4*1*(-1+5i)\,,\\ &= 9 - 16 + 24i + 4 - 20i = -3 + 4i.\end{aligned}$$

L'étape suivante consiste à déterminer un nombre complexe z' tel que $z'^2 = \Delta$. A cette fin, on détermine la forme exponentielle du nombre complexe Δ. Précisément,

$$|\Delta| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

de sorte que

$$\Delta = 5\left(\frac{-3+4i}{5}\right) = 5\,(\cos\theta + i\sin\theta) = 5e^{i\theta} \text{ avec } \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[.$$

On pose ensuite $z' = \rho e^{i\varphi}$ et l'on écrit :

$$z'^2 = \Delta \Leftrightarrow z' = \rho e^{i\varphi} \text{ et } \rho^2 e^{i2\varphi} = 5e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = \rho e^{i\varphi} \\ \rho^2 = 5, \\ 2\varphi = \theta + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

soit

$$z'^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} z' = \rho e^{i\varphi} \\ \rho = \sqrt{5}, \\ \varphi = \dfrac{\theta}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

On choisit de prendre $z' = \sqrt{5}e^{i\frac{\theta}{2}}$. Par conséquent, l'équation admet deux racines complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{(3+4i)+z'}{2} = \frac{(3+4i)+\sqrt{5}\left(\cos\dfrac{\theta}{2} + i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)}{2}$$

et

$$z_2 = \frac{(3+4i)-z'}{2} = \frac{(3+4i)-\sqrt{5}\left(\cos\dfrac{\theta}{2} + i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)}{2}.$$

On peut maintenant expliciter les valeurs de $\cos\frac{\theta}{2}$ et $\sin\frac{\theta}{2}$. En effet,

$$\left\{\begin{array}{l}\sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2},\\[2ex] \cos\theta = 1-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}\end{array}\right.$$

soit

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{4}{5} = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2},\\[2ex] -\frac{3}{5} = 1-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}.\end{array}\right.$$

On déduit que :

$$\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

ce qui induit

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

car

$$\theta \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$$

et donc

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

On rejecte ces deux informations dans les expressions des deux nombres complexes z_1 et z_2 pour obtenir au final :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{(3+4i)+\sqrt{5}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}+i\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{2},\\ &= \frac{(3+4i)+1+2i}{2} = 2+3i\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{(3+4i)-\sqrt{5}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}+i\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{2},\\ &= \frac{(3+4i)-(1+2i)}{2} = 1+i.\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{S = \{1+i, 2+3i\}.\ \blacksquare}$$

2 Fractions rationnelles : décomposition en éléments simples

2.1 Exercice

<u>Exercice :</u> Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

- $\dfrac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}$ sur $\mathbb{R}$,
- $\dfrac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2}$ sur $\mathbb{R}$,
- $\dfrac{(3-2i)\,X-5+3i}{X^2+iX+2}$ sur $\mathbb{C}$,
- $\dfrac{X+i}{X^2+i}$ sur $\mathbb{C}$,
- $\dfrac{X}{(X+i)^2}$ sur $\mathbb{C}$,
- $\dfrac{X}{(X^2+1)\,(X^2+4)}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$. ■

<u>Réponse :</u>

• Puisque le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur, on déduit que la partie entière est ici non nulle. Déterminons la explicitement maintenant :

$$X^3-3X^2+X-4=(X-1)\left(X^2-2X-1\right)-5$$

et donc

$$\boxed{\frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}=\frac{(X-1)\left(X^2-2X-1\right)-5}{X-1}=X^2-2X-1-\frac{5}{X-1}.}$$

Autrement dit, la partie entière est le polynôme $X\mapsto X^2-2X-1$ et la décomposition en éléments simples est alors terminée.

• Même point de départ que précédemment. On écrit :

$$2X^3+X^2-X+1=\left(X^2-3X+2\right)(2X+7)+16X-13$$

de sorte que :

$$\begin{aligned}\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2} &= \frac{\left(X^2-3X+2\right)(2X+7)+16X-13}{X^2-3X+2},\\ &= 2X+7+\frac{16X-13}{X^2-3X+2},\\ &= 2X+7+\frac{16X-13}{(X-1)(X-2)}.\end{aligned}$$

La partie entière est donc non nulle et vaut le polynôme $X \mapsto 2X+7$. Décomposons maintenant en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{16X-13}{(X-1)(X-2)}.$$

On sait que :

$$\frac{16X-13}{(X-1)(X-2)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2}$$

et il reste à expliciter les coefficients a et b. On applique la méthode suivante pour expliciter a

$$(X-1)\frac{16X-13}{(X-1)(X-2)} = a + \frac{b(X-1)}{X-2}$$

soit

$$\frac{16X-13}{X-2} = a + \frac{b(X-1)}{X-2}$$

et on prend $X=1$. Ainsi, $a=-3$. Sur le même principe,

$$\frac{16X-13}{X-1} = \frac{a(X-2)}{X-1} + b$$

et on opte pour $X=2$, ce qui conduit à $b=+19$. Au final,

$$\boxed{\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2} = 2X+7-\frac{3}{X-1}+\frac{19}{X-2}.}$$

• Le polynôme du numérateur étant de degré strictement inférieur à celui du dénominateur, la partie entière est nulle. Tâchons de factoriser le dénominateur. Dans les faits, le polynôme $X \mapsto X^2+iX+2$ admet comme discriminant :

$$\Delta = i^2 - 4*2 = -9 = (3i)^2.$$

Il admet donc les deux racines complexes suivantes :

$$\frac{-i+3i}{2} = i \text{ et } \frac{-i-3i}{2} = -2i.$$

Par conséquent,

$$\frac{(3-2i)\,X-5+3i}{X^2+iX+2}=\frac{(3-2i)\,X-5+3i}{(X-i)\,(X+2i)}.$$

Regardons ensuite si i et $-2i$ sont deux racines du numérateur :

$$\begin{array}{l}(3-2i)\,i-5+3i=3i+2-5+3i=6i-3\neq 0,\\(3-2i)\,(-2i)-5+3i=-6i-4-5+3i=-3i-9\neq 0\end{array}$$

et donc

$$\frac{(3-2i)\,X-5+3i}{(X-i)\,(X+2i)}=\frac{a}{X-i}+\frac{b}{X+2i}.$$

On multiplie par $X-i$ et on prend $X=i$ pour obtenir :

$$\frac{(3-2i)\,X-5+3i}{X+2i}=a+\frac{b\,(X-i)}{X+2i}$$

soit

$$a=\frac{(3-2i)\,i-5+3i}{i+2i}=\frac{6i-3}{3i}=\frac{2i-1}{i}=-\left(2i^2-i\right)=-(-2-i)=2+i.$$

Concernant b,

$$(X+2i)\,\frac{(3-2i)\,X-5+3i}{(X-i)\,(X+2i)}=(X+2i)\,\frac{a}{X-i}+b$$

puis pour $X=-2i$

$$\begin{aligned} b &= \frac{(3-2i)\,(-2i)-5+3i}{-2i-i}=\frac{-6i-4-5+3i}{-3i}=\frac{-3i-9}{-3i},\\ &= \frac{i+3}{i}=-(-1+3i)=1-3i.\end{aligned}$$

En résumé,

$$\boxed{\frac{(3-2i)\,X-5+3i}{(X-i)\,(X+2i)}=\frac{2+i}{X-i}+\frac{1-3i}{X+2i}.}$$

• La partie entière est nulle ici. Effectuons la factorisation du polynôme $X\mapsto X^2+i$. On pose $X=\rho e^{i\theta}$ et il vient successivement :

$$\begin{aligned} X^2+i &= 0\Leftrightarrow X^2=-i\Leftrightarrow X^2=e^{i\frac{3\pi}{2}}\Leftrightarrow \rho^2e^{i2\theta}=e^{i\frac{3\pi}{2}},\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\rho^2=1,\\ 2\theta=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\rho=1 \text{ car } \rho\geq 0,\\ \theta=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

D'où la factorisation suivante :

$$
\begin{aligned}
X^2+i &= \left(X-e^{i\dfrac{3\pi}{4}}\right)\left(X-e^{i\dfrac{7\pi}{4}}\right), \\
&= \left(X+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Il s'ensuit immédiatement que :

$$
\begin{aligned}
\frac{X+i}{X^2+i} &= \frac{X+i}{\left(X+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}, \\
&= \frac{a}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{b}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}.
\end{aligned}
$$

On écrit :

$$
\left(X+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{X+i}{X^2+i}=a+\frac{b\left(X+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}
$$

et donc

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}+i}{-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)}{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}, \\
&= \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\right)\left(-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)}{\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)}, \\
&= \frac{1+i-\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)i+\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)}{2+2i-2i+2}, \\
&= \frac{1+i-i-\sqrt{2}i+1+\sqrt{2}}{2+2i-2i+2} = \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{4}
\end{aligned}
$$

puis

$$
\frac{\left(X-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(X+i)}{\left(X+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=b+\frac{a\left(X-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}}.
$$

Le choix $X = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ conduit à :

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} + i}{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}, \\
&= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) + i\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)} = \frac{1 + i + i\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2} - 1 - i\right)}{2 - (-2)}, \\
&= \frac{1 + i + i\sqrt{2} - \sqrt{2} - i + 1}{4}, \\
&= \frac{2 + i\sqrt{2} - \sqrt{2}}{4} = \frac{2 - \sqrt{2} + \sqrt{2}i}{4}.
\end{aligned}
$$

En conclusion,

$$
\boxed{\frac{X + i}{X^2 + i} = \frac{\frac{2 + \sqrt{2} - \sqrt{2}i}{4}}{X + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\frac{2 - \sqrt{2} + \sqrt{2}i}{4}}{X - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}.}
$$

• La partie entière est nulle. Cette fraction rationnelle se décompose en éléments simples sous la forme suivante :

$$
\frac{X}{(X + i)^2} = \frac{a}{X + i} + \frac{b}{(X + i)^2}.
$$

On multiplie cette égalité par $(X + i)^2$

$$
X = (X + i)\, a + b
$$

et on prend $X = -i$ pour obtenir

$$
b = -i.
$$

On multiplie ensuite par $X + i$

$$
\frac{X}{X + i} = a + \frac{b}{X + i}.
$$

et on choisit $X = 0$

$$
0 = a + \frac{-i}{i} \qquad i.e. \qquad a = 1.
$$

Au final,

$$
\boxed{\frac{X}{(X + i)^2} = \frac{1}{X + i} - \frac{i}{(X + i)^2}.}
$$

• Commençons par la factorisation sur $\mathbb{C}[X]$. La partie entière est nulle de sorte que :

$$\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)} = \frac{a}{X+i} + \frac{b}{X-i} + \frac{c}{X+2i} + \frac{d}{X-2i}.$$

Donc 4 coefficients doivent être ici déterminer. Il vient successivement :

$$\frac{X(X+i)}{(X^2+1)(X^2+4)} = a + \frac{b(X+i)}{X-i} + \frac{c(X+i)}{X+2i} + \frac{d(X+i)}{X-2i},$$

soit

$$\frac{X}{(X-i)(X^2+4)} = a + \frac{b(X+i)}{X-i} + \frac{c(X+i)}{X+2i} + \frac{d(X+i)}{X-2i}.$$

Le choix $X=-i$ donne

$$a = \frac{-i}{(-i-i)\left((-i)^2+4\right)} = \frac{-i}{3(-2i)} = \frac{1}{6}.$$

On continue. Concernant b,

$$\frac{X(X-i)}{(X^2+1)(X^2+4)} = \frac{a(X-i)}{X+i} + b + \frac{c(X-i)}{X+2i} + \frac{d(X-i)}{X-2i},$$

soit

$$\frac{X}{(X+i)(X^2+4)} = \frac{a(X-i)}{X+i} + b + \frac{c(X-i)}{X+2i} + \frac{d(X-i)}{X-2i}.$$

On opte pour $X=i$

$$b = \frac{i}{(i+i)(i^2+4)} = \frac{1}{6}.$$

Puis, on multiplie par $X+2i$

$$\frac{X(X+2i)}{(X^2+1)(X^2+4)} = \frac{a(X+2i)}{X+i} + \frac{b(X+2i)}{X-i} + c + \frac{d(X+2i)}{X-2i},$$

ce qui conduit à :

$$\frac{X}{(X^2+1)(X-2i)} = \frac{a(X+2i)}{X+i} + \frac{b(X+2i)}{X-i} + c + \frac{d(X+2i)}{X-2i}.$$

On fixe X à $-2i$

$$\frac{-2i}{\left((-2i)^2+1\right)(-2i-2i)} = c$$

soit

$$c = \frac{-2i}{(-4i)(-3)} = -\frac{1}{6}.$$

Enfin, on multiplie par $X-2i$

$$\frac{X\left(X-2i\right)}{\left(X^2+1\right)\left(X^2+4\right)}=\frac{a\left(X-2i\right)}{X+i}+\frac{b\left(X-2i\right)}{X-i}+\frac{c\left(X-2i\right)}{X+2i}+d$$

de sorte que :

$$\frac{X}{\left(X^2+1\right)\left(X+2i\right)}=\frac{a\left(X-2i\right)}{X+i}+\frac{b\left(X-2i\right)}{X-i}+\frac{c\left(X-2i\right)}{X+2i}+d.$$

Si $X=2i$

$$d=\frac{2i}{\left(\left(2i\right)^2+1\right)\left(2i+2i\right)}=\frac{2i}{\left(-3\right)\left(4i\right)}=-\frac{1}{6}.$$

En conclusion, la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}\left[X\right]$ est :

$$\boxed{\frac{X}{\left(X^2+1\right)\left(X^2+4\right)}=\frac{1}{6\left(X+i\right)}+\frac{1}{6\left(X-i\right)}-\frac{1}{6\left(X+2i\right)}-\frac{1}{6\left(X-2i\right)}.}$$

On déduit de cette décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}\left[X\right]$ la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}\left[X\right]$ suivante :

$$\boxed{\frac{X}{\left(X^2+1\right)\left(X^2+4\right)}=\frac{X}{3\left(X^2+1\right)}-\frac{X}{3\left(X^2+4\right)}.\ \blacksquare}$$

3 Espaces vectoriels

3.1 Résumé de cours

Définition : Soit $\mathbb{K}$ un **corps commutatif**. On appelle **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ un ensemble E sur lequel on a défini **deux lois de composition** :

1. Une **loi interne** (*i.e.* une application $E\times E\to E$), dite **addition**, notée $\oplus$ qui vérifie :
- $(x\oplus y)\oplus z=x\oplus(y\oplus z)\qquad\forall x,y,z\in E,$ **Distributivité**
- $x\oplus y=y\oplus x\qquad\forall x,y\in E,$ **Commutativité**
- il existe un élément de E noté 0_E, dit **élément neutre**, tel que :
  $\forall x\in E\qquad x\oplus 0_E=x,$
- pour tout $x\in E$, il existe un élément de E noté $(-x)$, dit **opposé de** x, tel que $\forall x\in E\qquad x\oplus(-x)=0_E$

2. Une **loi externe** de domaine $\mathbb{K}$ (*i.e.* une application $\mathbb{K} \times E \to E$) notée $\otimes$ ou . qui vérifie :
• $\lambda \otimes (\mu \otimes x) = (\lambda\mu) \otimes x \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,$
• $(\lambda + \mu) \otimes x = (\lambda \otimes x) \oplus (\mu \otimes x) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,$
• $\lambda \otimes (x \oplus y) = (\lambda \otimes x) \oplus (\lambda \otimes y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in E,$
• $1 \otimes x = x \quad \forall x \in E$
(1 étant l'élément neutre de la **multiplication** dans $\mathbb{K}$).

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont dits **scalaires** et ceux de E **vecteurs**. ■

Exemples :
• $E = \mathbb{R}^n$ muni des lois suivantes est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\circ \text{ interne} \quad (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) := (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)\,,}$$

$$\boxed{\circ \text{ externe} \quad \lambda\,(x_1, ..., x_n) := (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)\,.}$$

Ici, $0_{\mathbb{R}^n} = (0, ..., 0)$ et l'opposé $(-x)$ de $x = (x_1, ..., x_n)$ est $(-x_1, ..., -x_n)$. De même, $\mathbb{C}^n$ est muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et, plus généralement, $\mathbb{K}^n$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ avec les lois définies par les formules ci-dessus.

• $E = \mathbb{R}_n[X]$, ensemble des fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré $\leq n$, *i.e.* :

$$\boxed{\mathbb{R}_n[X] = \{P : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n; a_i \in \mathbb{R}\}}$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni des lois :

$$\boxed{\begin{array}{l} \circ \text{ loi interne} \\ \quad (a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n) + (b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n) \\ \qquad := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\,x + ... + (a_n + b_n)\,x^n, \end{array}}$$

$$\boxed{\circ \text{ loi externe} \quad \lambda\,(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n) := (\lambda a_0 + \lambda a_1 x + ... + \lambda a_n x^n)\,.}$$

• $M_2(\mathbb{K}) = \{$matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{K}\}$. On définit pour $M_2(\mathbb{K})$ une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ en posant :

$$\boxed{\circ \text{ loi interne} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix},}$$

$$\boxed{\circ \text{ loi externe} \quad \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}.}$$

L'élément neutre est évidemment la matrice nulle $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et l'opposé de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.

• Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. On définit une structure d'espace vectoriel sur $E_1 \times E_2$ par :

$$\boxed{\circ \text{ loi interne} \quad (x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2)\,,}$$

$$\boxed{\circ \text{ loi externe} \quad \lambda\,(x_1, x_2) := (\lambda x_1, \lambda x_2)\,.}$$

D'une manière analogue, on définit une structure d'espace vectoriel pour le produit $E_1 \times ... \times E_n$ si $E_1, ..., E_n$ sont des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$. ■

Définition : Soit E un espace vectoriel et F une partie non vide de E. On dit que F est un **sous-espace vectoriel de** E si la restriction des lois de E à F fait de F un espace vectoriel. ■

En principe, pour montrer que F est un sous-espace vectoriel, il faudrait vérifier les huit axiomes de la définition précédente. En fait, il suffit de vérifier la "stabilité" des lois de composition comme l'affirme la proposition qui vient.

Proposition : Soit E un espace vectoriel et $F \subset E$. Alors F est un **sous-espace vectoriel de** E si et seulement si :

1. $F \neq \varnothing$,
2. $x, y \in F \Rightarrow x + y \in F$
3. $x \in F, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda x \in F$. ■

La proposition suivante est laissée en exercice :

Proposition : F est un **sous-espace vectoriel de** E si et seulement si :

1. $F \neq \varnothing$,
2. $x, y \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda x + \mu y \in F$. ■

Remarque : Si F est un sous-espace vectoriel alors F contient **nécessairement le vecteur nul**. ■

3.2 Série d'exercices

3.2.1 Espaces vectoriels : définition, sous-espace

Exercice 1 : On définit sur $\mathbb{R}^2$ des lois internes $\oplus$ et des lois externes $\otimes$. Dans chacun des cas, $\left(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes\right)$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel?

1. $(x,y) \oplus (x',y') = (x+x', y+y')$ et $\lambda \otimes (x,y) = (\lambda x, y)$.
2. $(x,y) \oplus (x',y') = (x+x', y+y'+2)$ et $\lambda \otimes (x,y) = (\lambda x, \lambda y)$.
3. $(x,y) \oplus (x',y') = (x+x', y+y')$ et $\lambda \otimes (x,y) = (\lambda y, \lambda x)$.
4. $(x,y) \oplus (x',y') = (x+x', y+y')$ et $\lambda \otimes (x,y) = (\lambda x, 0)$.
5. $(x,y) \oplus (x',y') = (xx', yy')$ et $\lambda \otimes (x,y) = (\lambda x, y)$.
6. $(x,y) \oplus (x',y') = (x+x', y+y')$ et $\lambda \otimes (x,y) = \left(\lambda^2 x, \lambda^2 y\right)$. ■

Réponse :
1. Concernant la loi interne, on démontre successivement les propriétés qui viennent. Tout d'abord, $\forall\left((x,y),(x',y,'),(x'',y'')\right) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^3$

$$\begin{aligned}((x,y)\oplus(x',y'))\oplus(x'',y'') &= (x+x', y+y')\oplus(x'',y''),\\ &= (x+x'+x'', y+y'+y'')\\ &= (x,y)\oplus((x',y')\oplus(x'',y'')).\end{aligned}$$

De plus, $\forall\left((x,y),(x',y,')\right) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2$

$$(x,y)\oplus(x',y') = (x+x', y+y') = (x'+x, y'+y) = (x',y')\oplus(x,y).$$

Le couple $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ est l'élément neutre puisque

$$\begin{array}{ll}\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 & (x,y)\oplus(0,0) = (x,y),\\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 & (0,0)\oplus(x,y) = (x,y).\end{array}$$

Enfin pour tout élément $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on peut définir l'opposé de (x,y) comme étant le couple $(-x,-y)$ et vérifiant :

$$\begin{array}{l}(x,y)\oplus(-x,-y) = (0,0),\\ (-x,-y)\oplus(x,y) = (0,0).\end{array}$$

Il reste maintenant à s'assurer des propriétés satisfaites par la loi externe. Il vient successivement que $\forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\lambda\otimes(\mu\otimes(x,y)) = \lambda\otimes((\mu x, y)) = (\lambda\mu x, y) = (\lambda\mu)\otimes(x,y)$$

et

$$(\lambda+\mu)\otimes(x,y) = ((\lambda+\mu)x, y) = (\lambda x + \mu x, y).$$

Or
$$(\lambda \otimes (x,y)) \oplus (\mu \otimes (x,y)) = (\lambda x, y) \oplus (\mu x, y) = (\lambda x + \mu x, y + y)$$
de sorte que l'égalité
$$(\lambda + \mu) \otimes (x,y) \neq (\lambda \otimes (x,y)) \oplus (\mu \otimes (x,y))$$
ne soit pas réalisée $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Par conséquent, $\left(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes\right)$ ne définit pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Concernant la loi interne, on établit les propriétés qui viennent. Tout d'abord, $\forall ((x,y), (x', y,'), (x'', y'')) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^3$
$$\begin{aligned} ((x,y) \oplus (x',y')) \oplus (x'',y'') &= (x + x', y + y' + 2) \oplus (x'', y''), \\ &= (x + x' + x'', y + y' + 2 + y'' + 2), \\ &= (x + x' + x'', y + y' + y'' + 4). \end{aligned}$$
Parallèlement, il vient :
$$\begin{aligned} (x,y) \oplus ((x',y') \oplus (x'',y'')) &= (x,y) \oplus (x' + x'', y' + y'' + 2), \\ &= (x + x' + x'', y + y' + y'' + 2 + 2), \\ &= (x + x' + x'', y + y' + y'' + 4) \end{aligned}$$
de sorte que l'égalité
$$((x,y) \oplus (x',y')) \oplus (x'',y'') = (x,y) \oplus ((x',y') \oplus (x'',y''))$$
soit satisfaite.

De plus, $\forall ((x,y), (x', y,')) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2$
$$(x,y) \oplus (x',y') = (x + x', y + y' + 2) = (x' + x, y' + y + 2) = (x',y') \oplus (x,y).$$

Le couple $(0,-2) \in \mathbb{R}^2$ est l'élément neutre puisque
$$\begin{array}{ll} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 & (x,y) \oplus (0,-2) = (x,y), \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 & (0,-2) \oplus (x,y) = (x,y). \end{array}$$
Enfin pour tout élément $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on peut définir l'opposé de (x,y) comme étant le couple $(-x, -4-y)$ et vérifiant :
$$(x,y) \oplus (-x, -4-y) = (0,-2).$$
Il reste maintenant à s'assurer des propriétés satisfaites par la loi externe. Il vient successivement que $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
$$\lambda \otimes (\mu \otimes (x,y)) = \lambda \otimes ((\mu x, \mu y)) = (\lambda \mu x, \lambda \mu y) = (\lambda \mu) \otimes (x,y)$$
et
$$(\lambda + \mu) \otimes (x,y) = ((\lambda + \mu)\, x, (\lambda + \mu)\, y) = (\lambda x + \mu x, \lambda y + \mu y).$$

Or

$$(\lambda \otimes (x,y)) \oplus (\mu \otimes (x,y)) = (\lambda x, \lambda y) \oplus (\mu x, \mu y) = (\lambda x + \mu x, \lambda y + \mu y + 2)$$

de sorte que l'égalité

$$(\lambda + \mu) \otimes (x,y) = (\lambda \otimes (x,y)) \oplus (\mu \otimes (x,y))$$

ne soit pas réalisée $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Par conséquent, $\left(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes\right)$ ne définit pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2 : Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et préciser leur dimension :

$$\boxed{\begin{array}{ll} E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right. & \left. x + y - z = x + y + z = 0\right\}, \\ E_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right. & \left. x^2 - z^2 = 0\right\}, \\ E_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right. & \left. e^x e^y = 0\right\}, \\ E_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right. & \left. z\left(x^2 + y^2\right) = 0\right\}. \blacksquare \end{array}}$$

Exercice 3 : Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

$$\boxed{\begin{array}{ll} E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right. & \left. x + y + a = 0 \quad \text{et} \quad x + 3az = 0\right\}, \\ E_2 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & f(1) = 0\}, \\ E_3 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & f(0) = 1\}, \\ E_4 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] & P' = 3\}, \\ E_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \right. & \left. x + \alpha y + 1 \geq 0\right\}. \blacksquare \end{array}}$$

3.2.2 Systèmes de vecteurs

Exercice 4 : Les familles suivantes sont-elles libres?

$$\boxed{\begin{array}{l} \overrightarrow{v_1}(1,0,1), \overrightarrow{v_2}(0,2,2) \text{ et } \overrightarrow{v_3}(3,7,1) \text{ dans } \mathbb{R}^3, \\ \overrightarrow{v_1}(1,0,0), \overrightarrow{v_2}(0,1,1) \text{ et } \overrightarrow{v_3}(1,1,1) \text{ dans } \mathbb{R}^3, \\ \overrightarrow{v_1}(1,2,1,2,1), \overrightarrow{v_2}(2,1,2,1,2), \ \overrightarrow{v_3}(1,0,1,1,0) \text{ et } \overrightarrow{v_4}(0,1,0,0,1) \text{ dans } \mathbb{R}^5, \\ \overrightarrow{v_1}(2,4,3,-1,-2,1), \overrightarrow{v_2}(1,1,2,1,3,1) \text{ et } \overrightarrow{v_3}(0,-1,0,3,6,2) \text{ dans } \mathbb{R}^6, \\ \overrightarrow{v_1}(2,1,3,-1,4,-1), \overrightarrow{v_2}(-1,1,-2,2,-3,3) \text{ et } \overrightarrow{v_3}(1,5,0,4,-1,7) \text{ dans } \mathbb{R}^6. \blacksquare \end{array}}$$

Exercice 5 : Soient E et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants engendrés respectivement par les vecteurs

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}}$$

et

$$\boxed{\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}\right\}.}$$

Montrer que E et F sont égaux. ■

3.2.3 Dimension et somme directe

Exercice 6 : Soient $\overrightarrow{e_1}\,(0,1,-2,1)\,,\overrightarrow{e_2}\,(1,0,2,-1)\,,\overrightarrow{e_3}\,(3,2,2,-1)\,,\overrightarrow{e_4}\,(0,0,1,0)$ et $\overrightarrow{e_5}\,(0,0,0,1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifiez votre réponse.

1. $Vect\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\} = Vect\{(1,1,0,0)\,,(-1,1,-4,2)\}\,,$
2. $(1,1,0,0) \in Vect\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\} \cap Vect\{\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_4}\}\,,$
3. $\dim\left(Vect\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\} \cap Vect\{\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_4}\}\right) = 1,$
4. $Vect\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\} + Vect\{\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_4}\} = \mathbb{R}^4,$
5. $Vect\{\overrightarrow{e_4},\overrightarrow{e_5}\}$ est un s.e.v. de supplémentaire $Vect\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$ dans $\mathbb{R}^4$. ■

Exercice 7 : Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$. ■

Exercice 8 : Soit $(\sum)$ le système d'équations linéaires :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x + 3y + 2z = 0, \\ x + y + z + t = 0, \\ x - t = 0. \end{array}\right.}$$

Montrer que l'ensemble des solutions de $(\sum)$ forme un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$. Déterminer la dimension et une base de F. ■

Exercice 9 : On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs

$$\boxed{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } e_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

Soient E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2 et e_3 et F celui engendré par e_4 et e_5. Calculer les dimensions respectives de $E, F, E \cap F$ et $E + F$. ■

4 Applications linéaires

4.1 Résumé de cours

La notion d'espace vectoriel ne devient vraiment intéressante que si l'on introduit la notion d'application linéaire. Il s'agit des applications entre espaces vectoriels qui, dans un sens que nous allons préciser, conservent la structure d'espace vectoriel.

Définition : Soient E et E' deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$ et f une application de E dans E'. On dit que f est linéaire si :

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1.\ f(v+w) = f(v) + f(w) & \forall v, w \in E, \\ 2.\ f(\lambda v) = \lambda f(v) & \forall v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}. \end{array}}$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans E' est noté $L_{\mathbb{K}}(E, E')$ ou, plus simplement, $L(E, E')$. ■

Remarque : Si f est linéaire, on a :

$$\boxed{f(0) = 0. \blacksquare}$$

Définition : On appelle **endomorphisme de** E une application linéaire de E dans E (même espace de départ et d'arrivée). L'ensemble des endomorphismes de E est noté $End_{\mathbb{K}}(E)$ ou plus simplement $End(E)$. On appelle **isomorphisme de E sur E'** une application linéaire bijective de E dans E'. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On appelle **forme linéaire sur** E une application linéaire $f : E \to \mathbb{K}$. ■

Proposition : Soit $f : E \to E'$ une application linéaire et F un sous-espace vectoriel de E. Alors $f(F)$ est un sous-espace vectoriel de E'. En particulier, $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de E' appelé **image de** f et noté $\operatorname{Im} f$. Sa dimension est appelée rang de f et est notée rg de f:

$$\boxed{rgf := \dim(\operatorname{Im} f). \blacksquare}$$

Proposition : Soit $f \in L(E, E')$. Alors f est injective si et seulement si

$$\boxed{\ker f = \{0\}. \ \blacksquare}$$

Théorème de la dimension : Soient E et E' deux espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to E'$ une application linéaire. On a alors :

$$\boxed{\dim E = rgf + \dim(\ker f). \ \blacksquare}$$

Corollaire : Soit $f \in L(E, E')$, E et E' étant deux espaces vectoriels de même dimension finie (en particulier par exemple $f \in EndE$ avec E de dimension finie). Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) f est injective,
b) f est surjective,
c) f est bijective. ■

4.2 Série d'exercices

4.2.1 Applications linéaires : définition

Exercice 1 : Déterminer si les applications f_i suivantes sont linéaires :

1. $f_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x + y, x - y) \in \mathbb{R}^2$,
2. $f_2 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (xy, x, y) \in \mathbb{R}^3$,
3. $f_3 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x + y + z, y - z, x + y) \in \mathbb{R}^3$,
4. $f_4 : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}[X]$,
5. $f_5 : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}_3[X]$,
6. $f_6 : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto (P(-1), P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^3$,
7. $f_7 : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P - (X - 2)P' \in \mathbb{R}[X]$. ■

4.2.2 Applications linéaires : image et noyau

Exercice 2 : Soit

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \\ (x, y, z, t) \mapsto (x - y + z + t, x + 2z - t, x + y + 3z - 3t). \end{array} \right.$$

Déterminer une base de $\ker f$ et une base de $\mathrm{Im}\, f$. ■

4.2.3 Applications linéaires : injectivité et surjectivité

Exercice 3 : Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base de $\mathbb{R}^3$ et λ un nombre réel. Démontrer que la donnée de :

$$\boxed{\begin{cases} \phi(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}, \\ \phi(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}, \\ \phi(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_1} + \lambda\overrightarrow{e_3} \end{cases}}$$

définit une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Ecrire l'image du vecteur

$$\boxed{\overrightarrow{v} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}.}$$

Comment choisir λ pour que ϕ soit injective? surjective? ■

4.2.4 Applications linéaires : matrices

Exercice 4 : Soit

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

1. Calculer $A^3 - 3A^2 + 2A$.
2. Quel est le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 3X^2 + 2X$?
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. A est-elle inversible? ■

Exercice 5 : Calculer l'inverse de

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \blacksquare}$$

Exercice 6 : Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$\boxed{\begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{pmatrix}.}$$

Calculer alors suivant la valeur du paramètre m le rang de cette matrice. ■

5 Réduction d'endomorphismes : diagonalisation et trigonalisation

5.1 Résumé de cours

Dans toute la suite, E désigne un espace vectoriel de dimension finie n. La clé de la diagonalisation et de la trigonalisation est la notion de vecteur propre (dont la définition reste valable en dimension infinie).

Définition : Soit $f \in End_{\mathbb{K}}(E)$. Un vecteur $v \in E$ est dit **vecteur propre de** f si :

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1.\ v \neq 0, & \\ 2.\ \exists \lambda \in \mathbb{K} & f(v) = \lambda v. \end{array}}$$

Le scalaire λ est dit **valeur propre** correspondante à v. ■

Théorème : $f \in End_{\mathbb{K}}(E)$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres. ■

Proposition : Soit $f \in End_{\mathbb{K}}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie n. Les valeurs propres de f sont les racines du polynôme :

$$\boxed{P_f(\lambda) := \det(f - \lambda Id).}$$

P_f est un polynôme de degré n, appelé **polynôme caractéristique de** f. ■

Remarque : On notera indifféremment P_f ou χ_f. ■

Proposition : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On note :

$$\boxed{E_\lambda := \{v \in E / f(v) = \lambda v\}.}$$

E_λ est un sous-espace vectoriel de E dit **espace propre** correspondant à λ. ■

Remarque : Si λ n'est pas valeur propre alors $E_\lambda = \{0\}$ et si λ est valeur propre alors

$$E_\lambda = \{\text{vecteurs propres associés à } \lambda\} \cup \{0\} \text{ et } \dim E_\lambda \geq 1. \blacksquare$$

Proposition : Soit $f \in End_{\mathbb{K}}(E)$ et λ une valeur propre de multiplicité α (*i.e.* λ est racine d'ordre α de P_f). Alors :

$$\boxed{1 \leq \dim E_\lambda \leq \alpha. \blacksquare}$$

5.1.1 Diagonalisation

Définition :

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est **diagonalisable** si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **diagonalisable** si et seulement s'il existe une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à A.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable, on appelle **diagonalisation de A la donnée de** P, D et P^{-1} telles que :

$$\boxed{P \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ et } A = PDP^{-1}.}$$

Clairement, diagonaliser A, c'est déterminer les trois matrices P, D et P^{-1}. Au lieu de diagonalisable, on dit aussi **réductible à la forme diagonale**. $\blacksquare$

Remarque :

1) Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}_0$ une base de E et $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$. Alors f est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

2) Toute matrice diagonale est diagonalisable. $\blacksquare$

Définition : f est diagonalisable si et seulement si E est somme directe d'espaces propres, *i.e.*, en notant $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de f, f est diagonalisable si et seulement si :

$$\boxed{E = E_{\lambda_1} \oplus ... \oplus E_{\lambda_p},}$$

ce qui est équivalent à :

$$\boxed{\dim E = \dim E_{\lambda_1} + ... + \dim E_{\lambda_p}. \blacksquare}$$

Théorème : Soit $f \in End_{\mathbb{K}}(E)$. f est diagonalisable si et seulement si :

1. P_f est scindé dans $\mathbb{K}$, ce qui veut dire que
$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} ... (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$
avec $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{K}$ et $\lambda_1 + ... + \lambda_p = n$,
2. pour chaque valeur propre λ_i de multiplicité α on a :
$$\dim E_{\lambda_i} = \alpha_i. \blacksquare$$

Corollaire : Si f admet n valeurs propres deux à deux distinctes alors f est diagonalisable. ■

Remarque : Soit $f \in End_{\mathbb{K}}(E)$. Alors f peut ou ne pas être diagonalisable sur $\mathbb{K}$ et, de plus, en pratique, f peut être diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et ne pas l'être sur $\mathbb{R}$. Il faudra donc préciser de façon systématique le corps sur lequel on envisage la diagonalisation. ■

Tout ceci nous amène donc à la trigonalisation ou triangularisation.

5.1.2 Trigonalisation

Définition :

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est **trigonalisable** si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ soit triangulaire.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **trigonalisable** si et seulement s'il existe une matrice triangulaire T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à A.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable, on appelle **trigonalisation de A la donnée de** P, T et P^{-1} telles que :

$$\boxed{P \in GL_n(\mathbb{K}),\ T \in T_{n,s}(\mathbb{K}) \text{ ou } T_{n,i}(\mathbb{K}) \text{ et } A = PTP^{-1}.}$$

Clairement, **trigonaliser A, c'est déterminer les trois matrices**

$$\boxed{P,\ T \text{ et } P^{-1}.}$$

Au lieu de trigonalisable, on dit aussi **triangulable** ou **triangularisable** ou **réductible à la forme triangulaire**. ■

Remarque :

1) Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}_0$ une base de E et $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$. Alors f est trigonalisable si et seulement si A est trigonalisable.

2) Toute matrice triangulaire est trigonalisable. ■

Théorème :

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On démontre que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ A \text{ est trigonalisable sur } \mathbb{K}, \\ \bullet\ \chi_A \text{ est scindé sur } \mathbb{K}. \end{array}}$$

2) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ est trigonalisable sur } \mathbb{K}, \\ \bullet\ \chi_f \text{ est scindé sur } \mathbb{K}. \blacksquare \end{array}}$$

Corollaire :

1) Soit E un $\mathbb{C}-evn$ de dimension finie n avec $n \geq 1$. Tout endomorphisme de E est trigonalisable.

2) Toute matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $(n \geq 1)$ est trigonalisable. ■

Exemple : Soit $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. On a clairement

$$\chi_A(X) = -(X-1)^2(X+2).$$

Le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$. De plus,

• $\ker(A+2I_3) = Vect\{(-1,0,1)\}$ si bien que $\dim(\ker(A+2I_3)) = 1 \neq$multiplicité de la valeur propre -2,

• $\ker(A-I_3) = Vect\{(2,0,-5)\}$ et $\dim(\ker(A-I_3)) = 1 =$multiplicité de la valeur propre 1.

Donc A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ni sur $\mathbb{C}$. En revanche, puisque le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$, A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$. En regardant A comme la matrice d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique, on sait qu'il existe une base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ceci signifie que :

• $f(v_1) = v_1$,
• $f(v_2) = av_1 + v_2$,
• $f(v_3) = bv_1 + cv_2 - 2v_3$.

• calcul de v_1 : l'équation $(f - Id)(v_1) = 0$ donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} -5x - 2z = 0, \\ 5x + y + 2z = 0 \end{array} \right.$$

et l'on peut prendre $v_1 = (2, 0, -5)$.

• calcul de v_2 : l'équation $(f - Id)(v_2) = av_1$ donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} -5x - 2z = 2a, \\ 5x + y + 2z = -5a \end{array} \right.$$

d'où par exemple en prenant $a = 1$ $v_2 = (-2, -3, 4)$.

• calcul de v_3 : on sait qu'il existe un vecteur propre v correspondant à la valeur propre -2, *i.e.* tel que $f(v) = -2v$. On peut prendre donc

$$v_3 = v \text{ et } b = c = 0.$$

En résolvant $(f + 2Id)\, v_3 = 0$, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} -2x - 2z = 0, \\ 3y = 0 \end{array} \right.$$

soit $v_3 = (1, 0, -1)$. Ainsi, A est semblable à la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

et la matrice de passage est

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}. \blacktriangle$$

<u>Exemple :</u> Trigonaliser la matrice $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{bmatrix}$.

Les calculs indiquent que $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3$. Par conséquent, χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et admet une racine réelle 1 de multiplicité 3. On a de plus la caractérisation $\ker(A - I_3) = Vect\{(1, 1, 2)\}$ de sorte que $\{(1, 1, 2)\}$ soit une base de $\ker(A - I_3)$ d'une part et $\dim(\ker(A - I_3)) = 1$ d'autre part. Puisque $\dim(\ker(A - I_3)) \neq$multiplicité de la valeur propre 1, on conclut que A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. En tenant un raisonnement analogue sur le corps $\mathbb{C}$, on arrive bien sûr à la conclusion que A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Ce point précisé, on sait en revanche que A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ (ou sur $\mathbb{C}$) comme conséquence du caractère scindé sur $\mathbb{R}$ (ou sur $\mathbb{C}$) du polynôme caractéristique. Effectuons la trigonalisation sur $\mathbb{R}$ de cette matrice. A cette fin, on introduit l'endomorphisme f dont la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

est A et la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ avec $v_1 = (1,1,2)$ telle que f soit sur cette nouvelle base représenté par la matrice triangulaire suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où les coefficients a, b et c à déterminer sont des réels. On a clairement les égalités suivantes :

- $f(v_1) = v_1$,
- $f(v_2) = av_1 + v_2$,
- $f(v_3) = bv_1 + cv_2 + v_3$.

Calculons les vecteurs v_2 et v_3. Tout d'abord,

$$\begin{aligned} (f - Id)(v_2) &= av_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -15 & -7 & 11 \\ -14 & -6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a \\ 2a \end{bmatrix}, \\ &\Leftrightarrow \quad x = \alpha, \ y = 3a + \alpha \text{ et } z = 2a + 2\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Avec le choix suivant $a = 1$, il s'ensuit que $x = \alpha$, $y = 3 + \alpha$ et $z = 2 + 2\alpha$ et on opte pour le vecteur $v_2 = (0,3,2)$. Tenons le même raisonnement pour déterminer le vecteur v_3 partant du fait que :

$$\begin{aligned} (f - Id)(v_3) &= bv_1 + cv_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -15 & -7 & 11 \\ -14 & -6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ b + 3c \\ 2b + 2c \end{bmatrix}, \\ &\Leftrightarrow \quad x = \beta, \ y = 3b - 2c + \beta \text{ et } z = 2b - c + 2\beta, \ \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Avec le choix suivant $b = 2$ et $c = 3$, on trouve que $x = \beta$, $y = \beta$ et $z = 1 + 2\beta$ et on opte pour le vecteur $v_3 = (0,0,1)$. Au final, on vérifie :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

si bien que la famille $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ constitue bien une base de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \ \blacktriangle$$

Nous allons maintenant nous attarder sur la réduction de Jordan qui est une méthode de triangularisation très efficace et facile à mettre en place. A cette fin, il est indispensable de définir les polynômes annulateurs en général et plus particulièrement le polynôme minimal.

Polynômes annulateurs Théorème de Cayley-Hamilton :

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1.\ \forall f \in \mathcal{L}(E) & \chi_f(f) = 0, \\ 2.\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \chi_A(A) = 0.\ \blacksquare \end{array}}$$

Remarque : Le polynôme caractéristique χ_f de f (resp. A) annule f (resp. A). ■

Polynôme minimal Définition : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f admet un polynôme minimal si et seulement si :

$$\boxed{\{P \in \mathbb{K}[X] \quad P(f) = 0\} \neq \{0\}.}$$

Si f admet un polynôme minimal, il existe **un polynôme unitaire unique**, noté π_f ou m_f, tel que :

$$\boxed{\{P \in \mathbb{K}[X] \quad P(f) = 0\} = \pi_f \mathbb{K}[X]}$$

et π_f est appelé le polynôme minimal de f. ■

Définition : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **polynôme minimal de f le polynôme normalisé annulateur de f de degré le plus petit**. ■

Remarque : La terminologie unitaire ou normalisé signifie que le coefficient du terme de plus haut degré vaut 1. ■

Proposition :

1) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Il existe un polynôme unitaire unique, noté π_A ou m_A, tel que

$$\boxed{\{P \in \mathbb{K}[X] \quad P(A) = 0\} = \pi_A \mathbb{K}[X]}$$

et π_A est appelé le polynôme minimal de A.

2) Soient E un $\mathbb{K}-ev$ de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f admet un polynôme minimal. ■

Proposition : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de f si et seulement s'il est un multiple de π_f, *i.e.* π_f divise P. ■

Proposition : Soient E un $\mathbb{K}-ev$ de dimension finie ≥ 1 et $f \in \mathcal{L}(E)$. On démontre que π_f et χ_f ont les mêmes diviseurs irréductibles. ■

Corollaire :
1) Soient E un $\mathbb{K}-ev$ de dimension finie ≥ 1 et $f \in \mathcal{L}(E)$. On a :

$$\boxed{\pi_f^{-1}(\{0\}) = Sp_{\mathbb{K}}(f).}$$

2) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\boxed{\pi_A^{-1}(\{0\}) = Sp_{\mathbb{K}}(A). \ \blacksquare}$$

Proposition : Détermination du polynôme minimal. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les racines de π_f sont exactement les racines de χ_f, *i.e.* les valeurs propres mais avec une multiplicité en général différente. Plus précisément, si on considère χ_f sous la forme suivante :

$$\boxed{\chi_f(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{\alpha_1} (X-\lambda_2)^{\alpha_2} ... (X-\lambda_p)^{\alpha_p}}$$

avec

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ \lambda_i \neq \lambda_j \text{ dés que } i \neq j, \\ \bullet\ \alpha_1 + ... + \alpha_p = n \end{array}}$$

on a :

$$\boxed{\pi_f(X) = (X-\lambda_1)^{\beta_1} (X-\lambda_2)^{\beta_2} ... (X-\lambda_p)^{\beta_p} \text{ avec } 1 \leq \beta_i \leq \alpha_i. \ \blacksquare}$$

Exemple :
1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Il vient $\chi_A(X) = -(X+1)(X+2)(X-3)$ et donc

$$\pi_A(X) = (X+1)(X+2)(X-3).$$

2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On trouve $\chi_A(X) = -(X-1)(X+2)^2$ et l'on a ainsi deux possibilités pour le polynôme minimal :

- $\pi_A(X) = (X+1)(X+2)$,
- ou $\pi_A(X) = (X+1)(X+2)^2$.

On détermine ensuite la matrice $(A+I_3)(A+2I_3)$. Si on obtient $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors le polynôme minimal sera le premier choix sinon ce sera le second. Dans les faits,

$$(A+I_3)(A+2I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si bien que $\pi_A(X) = (X+1)(X+2)$. ▲

Théorème : **Critère de diagonalisibilité** :

1) Soient E un $\mathbb{K}-ev$ de dimension finie ≥ 1 et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour que f soit **diagonalisable sur** $\mathbb{K}$, il faut et il suffit que π_f soit **scindé simple**.

2) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Pour que A soit diagonalisable, il faut et il suffit que π_A soit **scindé simple**. ■

Corollaire :

1) Soient E un $\mathbb{K}-ev$ de dimension finie ≥ 1 et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour que f soit **trigonalisable sur** $\mathbb{K}$, il faut et il suffit que π_f soit **scindé sur** $\mathbb{K}$.

2) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Pour que A soit trigonalisable sur $\mathbb{K}$, il faut et il suffit que π_A soit **scindé sur** $\mathbb{K}$. ■

Exemple :

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a déjà vu que $\pi_A(X) = (X+2)(X-1)$. Donc A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Les calculs indiquent que $\chi_A(X) = -(X-1)^3$ et par conséquent

- $\pi_A(X) = X-1$,
- ou bien $\pi_A(X) = (X-1)^2$,
- ou bien $\pi_A(X) = (X-1)^3$

et A sera diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ si et seulement si $\pi_A(X) = X-1$ c'est-à-dire si et seulement si $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme A n'est évidemment pas la matrice identité, A n'est pas diagonalisable ni sur $\mathbb{R}$ ni sur $\mathbb{C}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On démontre que $\chi_A(X) = -(X-1)(X-2)^2$.
D'où

- $\pi_A(X) = (X-1)(X-2)$,
- ou bien $\pi_A(X) = (X-1)(X-2)^2$

et la matrice A sera diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ si et seulement si

$$\pi_A(X) = (X-1)(X-2)$$

c'est-à-dire si et seulement si $(A - I_3)(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En effectuant le produit $(A - I_3)(A - 2I_3)$, on trouve que $(A - I_3)(A - 2I_3) \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc la matrice A n'est pas diagonalisable ni sur $\mathbb{R}$ d'une part ni sur $\mathbb{C}$ d'autre part ▲

Exercice : Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et inversible. En déduire le polynôme minimal et à l'aide du polynôme minimal calculer A^{-1}. Réponse : $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{4, 4, 4, 8\}$ et $\dim(SEP(A, 4)) = 3$. A est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et $\pi_A(X) = (X-4)(X-8)$ et par conséquent $(A - 4I_4)(A - 8I_4) = 0$. On développe les calculs et on justifie que la matrice A est inversible pour trouver au final :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{32}(12I_4 - A) = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}. \blacksquare}$$

Réduction de Jordan Définition : On appelle **bloc de Jordan** une matrice carrée du type :

$$\boxed{J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \blacksquare}$$

Proposition : Soit $J(\lambda)$ un bloc de Jordan d'ordre n, on a :

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ \chi_J(X) = (-1)^n (X-\lambda)^n, \\ \bullet\ \pi_J(X) = (X-\lambda)^n, \\ \bullet\ \dim(SEP(J(\lambda),\lambda)) = 1.\ \blacksquare \end{array}}$$

Théorème : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$.

1^{er} cas : supposons d'abord que f n'ait qu'une seule valeur propre et que l'on ait :

$$\boxed{\chi_f(X) = (-1)^n (X-\lambda)^n \text{ et } \pi_f(X) = (X-\lambda)^\beta \text{ et } \dim(SEP(f,\lambda)) = \gamma.}$$

Il existe alors une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_1(\lambda) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & J_\gamma(\lambda) \end{pmatrix} = \widetilde{J}(\lambda)}$$

où

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet \text{ les } J_k(\lambda) \text{ sont des blocs de Jordan,} \\ \bullet \text{ l'ordre du plus grand bloc est } \beta, \\ \bullet \text{ le nombre des blocs est } \gamma \end{array}}$$

car dans chaque bloc il n'y a qu'un vecteur propre.

$2^{ème}$ cas : supposons que f admet les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_p$ de multiplicité $\alpha_1, ..., \alpha_p$, *i.e.* :

$$\boxed{\chi_f(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{\alpha_1} (X-\lambda_2)^{\alpha_2} ... (X-\lambda_p)^{\alpha_p}}$$

alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \underbrace{\widetilde{J}(\lambda_1)}_{\alpha_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \underbrace{\widetilde{J}(\lambda_2)}_{\alpha_2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \underbrace{\widetilde{J}(\lambda_p)}_{\alpha_p} \end{pmatrix}.\ \blacksquare}$$

Corollaire : Une matrice sous la forme de Jordan est diagonalisable si et seulement si elle est déjà sous forme diagonale. ■

5.2 Série d'exercices

5.2.1 Valeurs et vecteurs propres : définition

Exercice 1 : Soient $m \in \mathbb{R}$ et $A_m \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice

$$\boxed{\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}.}$$

Calculer les valeurs propres de A_m et une base de vecteurs propres. ■

Exercice 2 : Soit M la matrice suivante :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

Calculer le polynôme caractéristique de M. En déduire M^{-1}. ■

5.2.2 Réduction d'endomorphismes : diagonalisation

Exercice 3 : Pour quelles valeurs de $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ la matrice

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

est-elle diagonalisable? ■

Exercice 4 : Soient α et β deux réels et A la matrice suivante :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & -\alpha & 1 \\ 1-\beta & \alpha & \alpha-1 & -\beta \\ \beta & -\alpha & 1-\alpha & 1+\beta \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix}}.$$

1. A quelle(s) condition(s) sur α et β, A est-elle diagonalisable?
2. On suppose $\alpha = 0$ et $\beta = 0$. Vérifier que

$$A(A - I) = 0.$$

En déduire A^n et $(A+I)^{-1}$. ■

Exercice 5 : Etudier le caractère diagonalisable des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$,
2. $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. ■

5.2.3 Réduction d'endomorphismes : trigonalisation

Exercice 6 : Trigonaliser les matrices réelles suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. ■

Exercice 7 : Réduire sous la forme de Jordan les matrices suivantes :

$$\boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}. \blacksquare}$$

6 Applications de la réduction d'endomorphismes

6.1 Calcul de puissances de matrices

Exercice 1 : Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Donner un polynôme annulateur de A de degré aussi petit que possible. En déduire A^{-1}, A^3 et A^5. ■

6.2 Résolution de systèmes différentiels

Exercice 2 : Résoudre les sytèmes différentiels suivants :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - 5y, \\ \dfrac{dz}{dt} = -3x - 6y - 5z \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 3y + 4z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -3x - y - 2z. \blacksquare \end{array} \right.}$$

6.3 Suites récurrentes linéaires

Exercice 3 : Déterminer toutes les suites (u_n) telles que :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{ll} \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0, \\ u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 0. \blacksquare & \end{array} \right.}$$

6.4 Résolution de systèmes de suites récurrentes linéaires

Exercice 4 : Donner toutes les suites $(x_n), (y_n)$ et (z_n) telles que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + y_n, \\ y_{n+1} = y_n + z_n, \\ z_{n+1} = z_n + x_n. \end{array} \right.}$$

Parmi les solutions de ce système, donner celle qui satisfait :

$$\boxed{x_0 = 2, y_0 = z_0 = 1. \blacksquare}$$

7 Formes bilinéaires et quadratiques - formes hermitiennes

7.1 Résumé de cours

7.1.1 Forme bilinéaire

Définition : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (non nécessairement de dimension finie). On appelle **forme bilinéaire** une application bilinéaire :

$$\boxed{f : E \times E \to \mathbb{K},}$$

i.e. vérifiant :

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(x+y,z) = f(x,z) + f(y,z), & \\ f(x,y+z) = f(x,y) + f(x,z), & \forall x,y,z \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}. \blacksquare \\ f(\lambda x, y) = \lambda f(x,y) = f(x, \lambda y) & \end{array}}$$

Supposons que E soit de dimension finie n et soit $\{e_i\}$ une base de E. Si

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ et } y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j,$$

on a :

$$f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j f(e_i, e_j).$$

Les $f(e_i, e_j)$ sont des éléments de $\mathbb{K}$. Si on note :

$$a_{ij} = f(e_i, e_j),$$

l'expression de f dans la base $\{e_i\}$ est :

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

c'est-à-dire f est du type :

$$f(x,y) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + ... + a_{ij}x_iy_j + ... + a_{nn}x_ny_n.$$

Autrement dit, on reconnaît une forme bilinéaire par le fait que, en l'écrivant dans une base, on obtient une somme de monômes dans lesquels x_i et y_j apparaissent à la puissance 1. Ainsi, par exemple :

$$f(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_1 + x_1y_3$$

est bilinéaire alors que :

$$f(x,y) = 3x_1y_1 + 3x_1^2y_2 + ...$$

ne l'est pas, pas plus que :

$$f(x,y) = 3x_2y_2 + 2x_2 + ...$$

(car dans le second monôme y_i n'apparaît pas à la puissance 1).

On note

$$\boxed{A = M(f)_{e_I} = \begin{pmatrix} f(e_1,e_1) & ... & f(e_1,e_n) \\ & & \\ f(e_n,e_1) & & f(e_n,e_n) \end{pmatrix}}$$

la matrice de f dans la base $\{e_i\}$.

<u>Définition :</u> Une forme bilinéaire f est symétrique si et seulement si :

$$\boxed{\forall x, y \in E \qquad f(x,y) = f(y,x).\ \blacksquare}$$

Il est clair que si E est de dimension finie une forme bilinéaire f est symétrique si et seulement si la matrice de f (dans une base quelconque) est symétrique. $\blacksquare$

<u>Définition :</u> Soit f une forme bilinéaire sur un espace vectoriel E de dimension finie. On appelle **rang de** f le rang de la matrice qui représente f dans une base quelconque :

$$\boxed{rg(f) = rg\left(M(f)_{e_I}\right).}$$

f est dite **non dégénérée** si le rang de f est maximum, *i.e.* :

$$\boxed{rg(f) = n = \dim E.}$$

On a donc :

$$\boxed{\text{f est } \textbf{non dégénérée} \Leftrightarrow \det\left(M(f)_{e_I}\right) \neq 0,}$$

$\{e_i\}$ étant une base quelconque. $\blacksquare$

Remarque : Le déterminant de $M(f)_{e_I}$ que l'on appelle **discriminant de** f, dépend du choix de la base. ■

Définition : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (non nécessairement de dimension finie) et

$$f : E \times E \to \mathbb{K}$$

une forme bilinéaire.

a) On appelle **rang de** f le rang de l'application :

$$\boxed{j : \left| \begin{array}{l} E \to E^*, \\ y \mapsto f(.,y) . \end{array} \right.}$$

b) On appelle **noyau de** f - noté $N(f)$ - le noyau de l'application j :

$$\boxed{N(f) = \{y \in E \setminus f(.,y) = 0\},}$$

i.e. :

$$\boxed{N(f) = \{y \in E \setminus f(x,y) = 0 \quad \forall x \in E\}.}$$

c) f est dite **non dégénérée** si j est injective, *i.e.* si :

$$\boxed{N(f) = 0}$$

ou encore :

$$\boxed{\forall x \in E \qquad f(x,y) = 0 \Rightarrow y = 0. \ ■}$$

Proposition : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f une forme bilinéaire sur E. On a :

$$\boxed{\dim E = rg(f) + \dim(N(f)). \ ■}$$

Remarque : Bien que le noyau d'une forme bilinéaire se calcule comme le noyau de la matrice de f, la signification n'est pas la même. En particulier, le noyau de f n'est pas l'ensemble

$$\{(x,y) \in E \times E \qquad f(x,y) = 0\} .$$

Cet ensemble d'ailleurs n'est même pas un espace vectoriel. ■

7.1.2 Produit scalaire

Définition : Soit E un espace vectoriel réel. On appelle **produit scalaire sur** E une application

$$\boxed{\langle .,. \rangle : E \times E \to \mathbb{R}}$$

qui est :

- bilinéaire,
- symétrique,
- définie positive, *i.e.* :
  $\langle x, x \rangle \geq 0,$
  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Un espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'un produit scalaire, est dit

espace euclidien

et si E est de dimension infinie il est dit

espace préhilbertien réel. ■

7.1.3 Forme quadratique

Définition : Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Une application $q : E \to \mathbb{K}$ est dite **forme quadratique sur** E si, étant donnée une base $\{e_i\}$, $q(x)$ est un polynôme homogène de degré 2 en les composantes x_i de x dans la base $\{e_i\}$. ■

Exemple : Si $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$q(x) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 3x_1x_3 + 5x_2x_3$$

(où les x_i sont les composantes de x dans la base canonique), q est une forme quadratique. ▲

Considérons une forme bilinéaire symétrique f sur E et soit q l'application

$$q : E \to \mathbb{K}$$

définie par

$$\boxed{q(x) = f(x, x).}$$

Il est facile de voir que q est une forme quadratique. D'autre part, il ne peut exister qu'une seule forme bilinéaire symétrique f telle que :

$$\boxed{f(x,x) = q(x) \qquad \forall x \in E.}$$

En effet, si f est une telle forme, on a :

$$\begin{aligned} q(x+y) &= f(x+y, x+y) = f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y) \\ &= q(x) + 2f(x,y) + q(y) \end{aligned}$$

et donc nécessairement :

$$\boxed{f(x,y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right]}$$

(f est parfaitement déterminée par la connaissance de q).

Définition : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (non nécessairement de dimension finie). Une application

$$\boxed{q : E \to \mathbb{K}}$$

est dite forme quadratique s'il existe une application bilinéaire symétrique

$$\boxed{f : E \times E \to \mathbb{K}}$$

telle que

$$\boxed{f(x,x) = q(x).}$$

Dans ce cas, f est donnée par :

$$\boxed{f(x,y) = \tfrac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right]}$$

et f est dite **forme polaire de** q. ■

Puisque la donnée d'une forme bilinéaire symétrique est équivalente à la donnée d'une forme quadratique, les définitions sur les formes bilinéaires symétriques se transportent sur les formes quadratiques.

Définition : On appelle **rang, noyau, matrice d'une forme quadratique** q le rang, le noyau, la matrice de la forme polaire associée à q. Ainsi, q est dite **non dégénérée** si la forme polaire f est non dégénérée, *i.e.*

$$\boxed{f(x,y) = 0 \qquad \forall x \in E \Rightarrow y = 0.}$$

De plus, q est dite définie positive si la forme polaire est définie positive, *i.e.*

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ \forall x \in E \qquad q(x) \geq 0, \\ \bullet\ q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.\ \blacksquare \end{array}}$$

Définition : Soit q une forme quadratique sur E.On appelle **cône isotrope** l'ensemble

$$\boxed{I(q) = \{x \in E \qquad q(x) = 0\}.\ \blacksquare}$$

Remarque : On peut noter que $I(q)$ n'est pas un espace vectoriel mais justement un "cône", c'est-à-dire un sous-ensemble de vecteurs C tel que si $x \in C$ alors $\lambda x \in C\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$. $\blacksquare$

Proposition :

$$\boxed{N(q) \subset I(q).\ \blacksquare}$$

7.1.4 Forme hermitienne

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'établir dans le cadre des espaces vectoriels complexes une théorie analogue à celle du produit scalaire.

Définition : Soient E, F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$. Une application

$$\boxed{f : E \to F}$$

est dite **antilinéaire** si :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \bullet\ f(x+y) = f(x) + f(y), & \\ \bullet\ f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x) & \end{array} \qquad \forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}.\ \blacksquare}$$

Définition : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Une application

$$\boxed{f : E \times E \to \mathbb{C}}$$

est dite **sesquilinéaire** si elle est linéaire dans le second argument et antilinéaire dans le premier argument. $\blacksquare$

Supposons E de dimension finie et soit $\{e_i\}$ une base de E. Si $x = \sum\limits_i x_i e_i$ et $y = \sum\limits_j y_j e_j$ et f est une forme sesquilinéaire

$$f(x,y) = f\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j\right) = \sum_{i,j} \overline{x_i} y_j f(e_i, e_j).$$

Ainsi, la donnée des $f(e_i, e_j) \in \mathbb{C}$ détermine parfaitement f. On appelle matrice de f dans la base $\{e_i\}$ la matrice :

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} f(e_1,e_1) & f(e_1,e_2) & \cdots & f(e_1,e_n) \\ \vdots & & & \vdots \\ f(e_n,e_1) & & & f(e_n,e_n) \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont les matrices qui représentent x et y dans la base $\{e_i\}$ et $A = M(f)_{e_i}$ un calcul simple montre que :

$$\boxed{f(x,y) = \overline{{}^t X} A Y.}$$

<u>Définition :</u> Le rang de la matrice $M(f)_{e_i}$ ne dépend pas du choix de la base $\{e_i\}$. Ce rang est dit **rang de la forme sesquilinéaire**. ■

<u>Définition :</u> Une forme sesquilinéaire (sur un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{C}$) est dite **non dégénérée** si elle est de rang maximum (égal à la dimension de E), *i.e.* si :

$$\det M(f)_{e_i} \neq 0$$

($\{e_i\}$ étant une base arbitraire de E). ■

<u>Définition :</u> On appelle **noyau de la forme sesquilinéaire** f le sous-espace vectoriel $N(f)$ de E défini par :

$$\boxed{N(f) = \{y \in E \qquad f(x,y) = 0 \qquad \forall x \in E\}. \ ■}$$

<u>Proposition :</u>

$$\boxed{\dim E = rgf + \dim N(f). \ ■}$$

Les formes hermitiennes jouent le même rôle que les formes bilinéaires symétriques du paragraphe précédent.

Définition : Une forme sesquilinéaire h est dite **hermitienne** si :

$$\boxed{h(x,y) = \overline{h(y,x)} \qquad \forall x, y \in E.}$$

Si E est de dimension finie, $\{e_i\}$ une base de E et $H = M(h)_{e_i}$, h est hermitienne si et seulement si :

$$\boxed{{}^t\overline{H} = H. \ \blacksquare}$$

Définition : Une matrice $H \in M_n(\mathbb{C})$ est dite **hermitienne** si

$$\boxed{{}^t\overline{H} = H}$$

(en particulier les matrices symétriques réelles sont les matrices hermitiennes réelles). $\blacksquare$

Remarque : Si h est hermitienne alors :

$$\boxed{\forall x \in E \qquad h(x,x) \in \mathbb{R}}$$

(ce qui veut dire que les éléments de la diagonale principale d'une matrice hermitienne sont réels). $\blacksquare$

Proposition : Soit h une forme hermitienne et

$$\boxed{\widetilde{q}(x) = h(x,x).}$$

On a :

$$\boxed{h(x,y) = \frac{1}{4}\left[\widetilde{q}(x+y) - \widetilde{q}(x-y) - i\widetilde{q}(x+iy) + i\widetilde{q}(x-iy)\right]. \ \blacksquare}$$

7.2 Série d'exercices

7.2.1 Produit scalaire

Exercice 1 : A deux polynômes $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on associe :

$$\boxed{\langle P, Q\rangle = (a_0 + a_1)\, b_0 + (a_0 + 3a_1)\, b_1 + 3a_2b_2.}$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire. ■

Exercice 2 : Pour quelles valeurs de λ les formes bilinéaires ci-dessous définissent-elles un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

1. $f(x,y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3\lambda x_1y_3 + 3\lambda x_3y_1$,
2. $g(x,y) = x_1y_1 + 10x_2y_2 + 6x_1y_2 + \lambda x_3y_3 - x_2y_3 - x_3y_2$,
3. $h(x,y) = 2x_1y_1 + 7x_1y_2 + 7x_2y_1 + 8x_2y_2 - 3x_3y_3 + \lambda x_2y_3 + \lambda x_3y_2$,
4. $i(x,y) = (x_1+x_2)(y_1+y_2) + (x_1+x_3)(y_1+y_3)$
$+ (x_2+x_3)(y_2+y_3) - \lambda(x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3)$. ■

7.2.2 Forme quadratique

Exercice 3 : Vérifier que l'application $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie ci-dessous est une forme bilinéaire symétrique et déterminer la forme quadratique qui lui est associée :

$$\boxed{\phi((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + 2yy' + 2yz' + 2y'z + zz'.}$$

S'agit-il d'un produit scalaire? Vérifier que l'application $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie ci-dessous est une forme quadratique et déterminer la forme bilinéaire symétrique qui lui est associée :

$$\boxed{q((x,y,z)) = x^2 + 3(x+y-z)^2 + (z-y)^2.}$$

S'agit-il d'une norme euclidienne? ■

Exercice 4 : Soit a un nombre réel. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\boxed{q((x,y,z)) = x^2 + (1+a)y^2 + \left(1+a+a^2\right)z^2 + 2xy - 2ayz}$$

et soit f la forme bilinéaire symétrique associée à q.

1. Déterminer une décomposition de q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
2. Donner le rang et la signature de q suivant les valeurs de a.
3. Pour quelles valeurs de a, f définit-elle un produit scalaire? ■

7.2.3 Exemple de forme hermitienne en dimension infinie

<u>Exercice 5 :</u> Soient a et b deux applications continues dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$\int_0^1 [a(x) + ib(x)]\, dx = \int_0^1 a(x)\, dx + i \int_0^1 b(x)\, dx.$$

On considère l'espace vectoriel

$$E = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \text{ continues}\}.$$

Démontrer que l'application $h : E \times E \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\boxed{h(f,g) = \int_0^1 \overline{f(x)} g(x)\, dx}$$

est une forme hermitienne. ■

Partie II
ANALYSE

8 Equations différentielles

8.1 Equations différentielles du premier ordre

Exercice 1 : Une étude sur le comportement de bactéries placées dans une enceinte close dont le mileu nutritif est renouvelé en permanence a conduit à poser une loi d'évolution de la forme :

$$\boxed{N'(t) = 2N(t) - 0,0045\,[N(t)]^2} \tag{2}$$

où t est le temps exprimé en heures et $N(t)$ représente le nombre d'individus présents dans l'enceinte à l'instant t. On a, à $t = 0$, $N(0) = 1$ (en milliers).

1. On pose $y(t) = \dfrac{1}{N(t)}$. Montrer que y est solution d'une équation différentielle (E) du type $y' = ay + b$.
2. Résoudre (E).
3. En déduire que la solution de (2) est

$$N(t) = \frac{1}{0.99775\exp(-2t) + 0.00225}.$$

4. Etudier les variations de N.
5. Montrer que

$$N(t) = \frac{\exp(2t)}{0.99775 + 0.00225\exp(2t)}.$$

Déduisez-en une primitive de N.

6. On appelle nombre moyen de bactéries la limite quand T tend vers $+\infty$ de $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T N(t)\,dt$. Calculer cette intégrale et en déduire le nombre moyen de bactéries dans l'enceinte. ■

Réponse :

1. Clairement, $y(t) = \dfrac{1}{N(t)} \Leftrightarrow N(t) = \dfrac{1}{y(t)}$ et donc $N'(t) = \dfrac{-y'(t)}{y^2(t)}$. Injectons cette information dans (2)

$$N'(t) = 2N(t) - 0,0045\,[N(t)]^2 \Leftrightarrow \frac{-y'(t)}{y^2(t)} = 2\frac{1}{y(t)} - 0,0045\left[\frac{1}{y(t)}\right]^2$$

$$\Leftrightarrow y'(t) = -y^2(t)\left[\frac{2}{y(t)} - 0,0045\left[\frac{1}{y(t)}\right]^2\right],$$
$$\Leftrightarrow y'(t) = -2y(t) + 0,0045 \tag{3}$$
de sorte que $a = -2$ et $b = 0,0045$.

2. Introduisons l'équation homogène (H)

$$y'(t) = -2y(t)$$

dont l'ensemble des solutions est

$$\{C\exp(-2t), C \in \mathbb{R}\}.$$

Déterminons une solution particulière de (3). A cette fin, on met en place la méthode de variation de la constante. On cherche donc une solution particulière sous la forme :

$$y_P(t) = C(t)\exp(-2t)$$

de sorte que :

$$y_P'(t) = C'(t)\exp(-2t) + C(t) * (-2)\exp(-2t).$$

Il s'ensuit :

$$C'(t)\exp(-2t) + C(t) * (-2)\exp(-2t) = -2C(t)\exp(-2t) + 0,0045$$

soit

$$C'(t)\exp(-2t) = 0,0045$$

et donc

$$C'(t) = 0,0045\exp(2t).$$

Par conséquent,

$$C(t) = \frac{1}{2}0,0045\exp(2t) + \lambda$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. Dans les faits, il nous faut seulement une solution particulière, ce qui explique par la suite que l'on optera pour celle qui correspond à $\lambda = 0$. On pose donc :

$$y_P(t) = \left(\frac{1}{2} * 0,0045 * \exp(2t)\right)\exp(-2t) = \frac{0,0045}{2} = 0,00225.$$

La solution générale de (3) est donc :

$$y(t) = 0,00225 + C\exp(-2t)$$

où $C \in \mathbb{R}$. Enfin, puisque $y(0) = \dfrac{1}{N(0)} = 1$, on a :

$$1 = 0,00225 + C$$

soit

$$C = 1 - 0,00225 = 0,99775.$$

Ainsi,

$$y(t) = 0,00225 + 0,99775 \exp(-2t).$$

3. Puisque $N(t) = \dfrac{1}{y(t)}$, on retrouve bien que :

$$N(t) = \frac{1}{0,00225 + 0,99775 \exp(-2t)}.$$

4. N est bien sûr de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\begin{aligned} N'(t) &= \frac{-0,99775 * (-2) \exp(-2t)}{(0,00225 + 0,99775 \exp(-2t))^2}, \\ &= \frac{1,9955 \exp(-2t)}{(0,00225 + 0,99775 \exp(-2t))^2} > 0, \end{aligned}$$

ce qui traduit la croissance de la fonction N sur $\mathbb{R}$.

5. On peut écrire :

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{1}{0,00225 + 0,99775 \exp(-2t)}, \\ &= \frac{\exp(2t)}{\exp(2t)(0,00225 + 0,99775 \exp(-2t))}, \\ &= \frac{\exp(2t)}{0,00225 \exp(2t) + 0,99775} \end{aligned}$$

qui est bien le résultat escompté. Pour déterminer une primitive de N, on remarque que :

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{\exp(2t)}{0,00225 \exp(2t) + 0,99775} = \frac{1}{0,0045} \frac{0,0045 \exp(2t)}{0,00225 \exp(2t) + 0,99775}, \\ &= \frac{1}{0,0045} \frac{u'(t)}{u(t)} \end{aligned}$$

où $u(t) = 0,00225 \exp(2t) + 0,99775$. A partir de ces considérations, on déduit une primitive de N que l'on notera n par la suite :

$$\begin{aligned} n(t) &= \frac{1}{0,0045} \ln |0,00225 \exp(2t) + 0,99775|, \\ &= \frac{1}{0,0045} \ln (0,00225 \exp(2t) + 0,99775). \end{aligned}$$

6. Dans les faits, on a donc par conséquent :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_0^T N(t)\,dt &= \frac{1}{T}\left[n(t)\right]_0^T = \frac{1}{T}\left(n(T)-n(0)\right),\\
&= \frac{1}{T}\left(n(T)-\frac{1}{0,0045}\ln\left(0,00225+0,99775\right)\right),\\
&= \frac{1}{T}\left(n(T)-\frac{1}{0,0045}\ln 1\right)=\frac{n(T)}{T},\\
&= \frac{1}{0,0045}\,\frac{\ln\left(0,00225\exp\left(2T\right)+0,99775\right)}{T}
\end{aligned}$$

et par passage à la limite sur T on trouve le résultat suivant :

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T N(t)\,dt \underset{T\to+\infty}{\to} \frac{2}{0,0045}=\frac{4000}{9}.}$$

<u>Exercice 2 :</u> On considère l'équation différentielle suivante :

$$x\left(x^2-1\right)y'+2y=x^2 \tag{4}$$

où l'inconnue est la fonction y dépendant de la seule variable x.

1. Résoudre (4) dans chacun des intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.
2. Trouver les solutions de (4) sur $\mathbb{R}$. ■

<u>Réponse :</u>

1. Puisque la fonction $x\mapsto x\left(x^2-1\right)$ s'annule en les trois points $-1,0$ et 1, on résout (4) respectivement sur les quatres intervalles $I_1=]-\infty,-1[$, $I_2=]-1,0[$, $I_3=]0,1[$ et $I_4=]1,+\infty[$.

Résolvons l'équation tout d'abord sur I_1. On s'intéresse à l'équation homogène :

$$x\left(x^2-1\right)y'+2y=0. \tag{5}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
x\left(x^2-1\right)y'+2y &= 0 \Leftrightarrow x\left(x^2-1\right)y'=-2y \Leftrightarrow y'=-\frac{2}{x\left(x^2-1\right)}y\\
&\Leftrightarrow \ln|y|=\int -\frac{2}{x\left(x^2-1\right)}dx.
\end{aligned}$$

Déterminons les primitives de $x\mapsto -\dfrac{2}{x\left(x^2-1\right)}$. Un décomposition en éléments simples est ici utile :

$$-\frac{2}{x\left(x^2-1\right)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}.$$

Appliquons les techniques vues précédemment. Pour calculer le coefficient a

$$-\frac{2}{(x^2-1)} = a + \frac{bx}{x-1} + \frac{cx}{x+1}$$

et en prenant $x = 0$ il vient :

$$a = -\frac{2}{(0^2-1)} = 2.$$

Pour b

$$-\frac{2}{x(x+1)} = \frac{a(x-1)}{x} + b + \frac{c(x-1)}{x+1}$$

et lorsque $x = 1$

$$b = -\frac{2}{1(1+1)} = -1.$$

Enfin, pour c

$$-\frac{2}{x(x-1)} = \frac{a(x+1)}{x} + \frac{b(x+1)}{x-1} + c.$$

et la valeur $x = -1$ indique

$$c = -\frac{2}{-(-1-1)} = -1.$$

Ainsi,

$$-\frac{2}{x(x^2-1)} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

de sorte que :

$$x\left(x^2-1\right)y' + 2y = 0 \Leftrightarrow \ln|y| = \int -\frac{2}{x(x^2-1)}dx,$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \ln|y| = \int\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx, \\
&\Leftrightarrow \quad \ln|y| = 2\ln|x| - \ln|x-1| - \ln|x+1| + C \text{ avec } C \in \mathbb{R}, \\
&\Leftrightarrow \quad |y| = \exp\left(2\ln|x| - \ln|x-1| - \ln|x+1| + C\right) \text{ avec } C \in \mathbb{R}, \\
&\Leftrightarrow \quad |y| = e^C|x|^2 * \frac{1}{|x-1||x+1|} \text{ avec } C \in \mathbb{R}, \\
&\Leftrightarrow \quad y(x) = \lambda x^2 * \frac{1}{|x-1||x+1|} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Puisque l'intervalle de travail est $I_1 =]-\infty, -1[$

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= \lambda_1 x^2 * \frac{1}{-(x-1)(-1)(x+1)} \text{ avec } \lambda_1 \in \mathbb{R}, \\
&= \frac{\lambda_1 x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{\lambda_1 x^2}{x^2-1} \text{ avec } \lambda_1 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Ainsi, en tenant le même raisonnement les solutions de l'équation homogène sur les trois autres intervalles sont :

$$\begin{array}{rcl}
\bullet \text{ sur } I_2 & = &]-1,0[\\
y_2(x) & = & \dfrac{\lambda_2 x^2}{-(x-1)(x+1)} = \dfrac{-\lambda_2 x^2}{x^2-1} = \text{ avec } \lambda_2 \in \mathbb{R}, \\
\bullet \text{ sur } I_3 & = &]0,1[\\
y_3(x) & = & \dfrac{\lambda_3 x^2}{-(x-1)(x+1)} = \dfrac{-\lambda_3 x^2}{x^2-1} \text{ avec } \lambda_3 \in \mathbb{R}, \\
\bullet \text{ sur } I_4 & = &]1,+\infty[\\
y_4(x) & = & \dfrac{\lambda_4 x^2}{x^2-1} \text{ avec } \lambda_4 \in \mathbb{R}.
\end{array}$$

On peut affirmer que l'ensemble des solutions de l'équation homogène sur I_k, $k \in \{1,2,3,4\}$, est

$$S_{h,k} = \left\{ \frac{\mu_k x^2}{x^2-1}, \mu_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pour déterminer une solution particulière de (4), on met en place maintenant la méthode de variation de la constante. On cherche donc cette solution particulière sur I_k sous la forme :

$$y_{k,p}(x) = \frac{\mu_k(x)\, x^2}{x^2-1}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
y'_{k,p}(x) &= \frac{\left(\mu'_k(x)\, x^2 + 2\mu_k(x)\, x\right)\left(x^2-1\right) - \mu_k(x)\, x^2 * 2x}{\left(x^2-1\right)^2}, \\
&= \frac{\mu'_k(x)\, x^4 - \mu'_k(x)\, x^2 + 2\mu_k(x)\, x^3 - 2\mu_k(x)\, x - 2\mu_k(x)\, x^3}{\left(x^2-1\right)^2}, \\
&= \frac{\mu'_k(x)\, x^4 - \mu'_k(x)\, x^2 - 2\mu_k(x)\, x}{\left(x^2-1\right)^2}
\end{aligned}$$

puis

$$x\left(x^2-1\right) y'_{k,p} + 2y_{k,p} = x^2$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ x\left(x^2-1\right) \frac{\mu'_k(x)\, x^4 - \mu'_k(x)\, x^2 - 2\mu_k(x)\, x}{\left(x^2-1\right)^2} + 2\frac{\mu_k(x)\, x^2}{x^2-1} = x^2, \\
&\Leftrightarrow\ \frac{\mu'_k(x)\, x^5 - \mu'_k(x)\, x^3 - 2\mu_k(x)\, x^2}{x^2-1} + 2\frac{\mu_k(x)\, x^2}{x^2-1} = x^2, \\
&\Leftrightarrow\ \frac{\mu'_k(x)\, x^5 - \mu'_k(x)\, x^3}{x^2-1} = x^2, \\
&\Leftrightarrow\ \mu'_k(x)\, \frac{x^3\left(x^2-1\right)}{x^2-1} = x^2, \\
&\Leftrightarrow\ \mu'_k(x) = \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mu_k(x) = \ln|x| + \beta_k$$

avec $\beta_k \in \mathbb{R}$ et par conséquent

$$y_{k,p}(x) = \frac{\mu_k(x)\, x^2}{x^2-1} = \frac{(\ln|x| + \beta_k)\, x^2}{x^2-1}.$$

En résumé, l'ensemble des solutions sur $I_k,\ k \in \{1,2,3,4\}$, est

$$\begin{aligned} S_k &= \left\{ \frac{\mu_k x^2}{x^2-1} + \frac{(\ln|x| + \beta_k)\, x^2}{x^2-1}, (\mu_k, \beta_k) \in \mathbb{R}^2 \right\}, \\ &= \left\{ \frac{(\ln|x| + \beta_k + \mu_k)\, x^2}{x^2-1}, (\mu_k, \beta_k) \in \mathbb{R}^2 \right\} \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{S_k = \left\{ \frac{(\ln|x| + \gamma_k)\, x^2}{x^2-1}, \gamma_k \in \mathbb{R} \right\}.}$$

2. Si y est solution sur $\mathbb{R}$ de (4) alors il existe quatre réels $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ et γ_4 tels que :

$$y_{|I_k} = \frac{(\ln|x| + \gamma_k)\, x^2}{x^2-1}$$

soit

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{(\ln(-x) + \gamma_1)\, x^2}{x^2-1} \text{ sur } I_1 = \left]-\infty, -1\right[, \\[2ex] \dfrac{(\ln(-x) + \gamma_2)\, x^2}{x^2-1} \text{ sur } I_2 = \left]-1, 0\right[, \\[2ex] \dfrac{(\ln x + \gamma_3)\, x^2}{x^2-1} \text{ sur } I_3 = \left]0, 1\right[, \\[2ex] \dfrac{(\ln x + \gamma_4)\, x^2}{x^2-1} \text{ sur } I_4 = \left]1, +\infty\right[. \end{cases}$$

Regardons sous quelle(s) contrainte(s), la fonction y est continue sur $\mathbb{R}$. Etudions tout d'abord la continuité en 1. On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} y(x) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{(\ln x + \gamma_3)\, x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-} \left[\frac{x^2 \ln x}{x^2-1} + \gamma_3 \frac{x^2}{x^2-1} \right], \\ &= \frac{1}{2} + \gamma_3 \lim_{x\to 1^-} \left[\frac{x^2}{x^2-1} \right] \end{aligned}$$

car un développement au voisinage de 1 indique que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln x}{x^2-1} = \frac{1}{2}$. Il s'ensuit que :

$$\lim_{x\to 1^-} y(x) = \begin{cases} -\infty \text{ si } \gamma_3 > 0, \\ +\infty \text{ si } \gamma_3 < 0, \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } \gamma_3 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Parallèlement,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} y(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{(\ln x + \gamma_4)\, x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \left[\frac{x^2 \ln x}{x^2-1} + \gamma_4 \frac{x^2}{x^2-1}\right], \\ &= \frac{1}{2} + \gamma_4 \lim_{x\to 1^+} \left[\frac{x^2}{x^2-1}\right] \end{aligned}$$

car un développement au voisinage de 1 indique que $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\ln x}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}$. Il s'ensuit que :

$$\lim_{x\to 1^+} y(x) = \begin{cases} -\infty \text{ si } \gamma_4 < 0, \\ +\infty \text{ si } \gamma_4 > 0, \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } \gamma_4 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

De ce fait, la continuité de y en 1 ne peut être assurée que si

$$\gamma_3 = \gamma_4 = 0.$$

Etudions maintenant la continuité de y en -1. On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to(-1)^-} y(x) &= \lim_{x\to(-1)^-} \frac{(\ln(-x) + \gamma_1)\, x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to(-1)^-} \left[\frac{x^2 \ln(-x)}{x^2-1} + \gamma_1 \frac{x^2}{x^2-1}\right], \\ &= \frac{1}{2} + \gamma_1 \lim_{x\to(-1)^-} \left[\frac{x^2}{x^2-1}\right] \end{aligned}$$

car un développement au voisinage de -1 indique que $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{\ln(-x)}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}$. Il s'ensuit que :

$$\lim_{x\to(-1)^-} y(x) = \begin{cases} -\infty \text{ si } \gamma_1 < 0, \\ +\infty \text{ si } \gamma_1 > 0, \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } \gamma_1 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Parallèlement,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to(-1)^+} y(x) &= \lim_{x\to(-1)^+} \frac{(\ln(-x) + \gamma_2)\, x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to(-1)^+} \left[\frac{x^2 \ln(-x)}{x^2-1} + \gamma_2 \frac{x^2}{x^2-1}\right], \\ &= \frac{1}{2} + \gamma_2 \lim_{x\to(-1)^+} \left[\frac{x^2}{x^2-1}\right] \end{aligned}$$

car un développement au voisinage de -1 indique que $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \frac{\ln(-x)}{x^2-1} = \frac{1}{2}$. Il s'ensuit que :

$$\lim_{x\to(-1)^+} y(x) = \begin{cases} -\infty \text{ si } \gamma_2 > 0, \\ +\infty \text{ si } \gamma_2 < 0, \\ \frac{1}{2} \text{ si } \gamma_2 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

De ce fait, la continuité de y en -1 ne peut être assurée que si

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0.$$

Il reste à étudier la continuité en 0. On a bien :

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^-} y(x) = 0$$

car

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \ln x}{x^2-1} = 0 = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2\ln(-x)}{x^2-1}$$

comme conséquence immédiate des limites

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0^-} (-x)\ln(-x) = 0.$$

En conclusion, l'équation (4) a au plus une solution sur $\mathbb{R}$, laquelle est :

$$\boxed{y(x) = \begin{cases} \frac{x^2\ln|x|}{x^2-1} \text{ sur } \mathbb{R} - \{-1,0,1\}, \\ 0 \text{ si } x = 0, \\ \frac{1}{2} \text{ si } x \in \{-1,1\}. \end{cases}}$$

Inversement, cette fonction y est bien sûr continue sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur ce même intervalle avec un dénominateur non nul et par ailleurs

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2\ln x}{x^2-1} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln x}{x^2-1} = 0, \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{x^2\ln(-x)}{x^2-1} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(-x)}{x^2-1} = 0 \end{aligned}$$

ce qui assure le caractère dérivable de cette fonction en 0. Il reste à étudier maintenant la dérivabilité de cette fonction en 1 et -1. Tout d'abord,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{y(x)-y(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{x^2\ln x}{x^2-1} - \frac{1}{2}}{x-1} = \frac{1}{2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{y(x)-y(1)}{x-1},$$

ce qui permet d'affirmer que y est dérivable en 1. Puis,

$$\lim_{x\to(-1)^+} \frac{y(x)-y(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{\dfrac{x^2\ln(-x)}{x^2-1}-\dfrac{1}{2}}{x-(-1)} = -\frac{1}{2} = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{y(x)-y(-1)}{x-(-1)}$$

de sorte que y soit dérivable en -1. Il en résulte que

$$\boxed{y(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2\ln|x|}{x^2-1} \text{ sur } \mathbb{R}-\{-1,0,1\}, \\ \\ 0 \text{ si } x=0, \\ \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } x\in\{-1,1\}. \end{cases}}$$

est l'unique solution de (4) sur $\mathbb{R}$. ■

8.2 Equations différentielles du second ordre à coefficients constants

Attention, ici on ne s'intéresse qu'aux équations différentielles d'ordre deux à coefficients constants.

Exercice 1 : Soit $q(t)$ la charge à l'instant t du condensateur de capacité C, monté en série avec une résistance R et une inductance L. Supposons créée une tension constante V aux bornes. On dispose alors de l'équation suivante :

$$\boxed{Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = V}$$

si

$$\boxed{i(t) = \frac{dq}{dt},}$$

laquelle se transforme en l'équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants suivante :

$$\boxed{L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V.} \tag{10}$$

On prendra comme conditions initiales :

$$\boxed{\begin{array}{l} q(0) = q_0 > 0, \\ i(0) = q'(0) = 0 \text{ (pas de courant).} \end{array}} \tag{11}$$

1. Démontrer que (10) admet $q = CV$ comme solution particulière.
2. Trouver la solution de (10) et (11). ■

Réponse :

1. Si on prend $q(t) = cste = CV$, il vient :

$$L\underbrace{\frac{d^2q}{dt^2}}_{=0} + R\underbrace{\frac{dq}{dt}}_{=0} + \frac{q}{C} = \frac{CV}{C} = V$$

de sorte que $q = CV$ soit une solution particulière de (10).

2. On associe à (10) l'équation homogène suivante :

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

à partir de laquelle on définit l'équation caractéristique :

$$Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0.$$

Cette équation du second degré admet :

$$\Delta = R^2 - 4\frac{L}{C}$$

comme discriminant. Trois cas de figure se présentent donc :

- $\boxed{\Delta > 0}$ *i.e.* $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. On a donc deux racines réelles

$$r_1 = \frac{-R - \sqrt{\Delta}}{2L} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-R + \sqrt{\Delta}}{2L}$$

et la solution générale de (10) est :

$$q_G(t) = CV + \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour que les conditions (11) soient satisfaites, il faut que :

$$\begin{aligned} q_G(0) &= CV + \lambda + \mu = q_0, \\ q_G'(0) &= \lambda r_1 + \mu r_2 = 0. \end{aligned}$$

On est donc amener à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = q_0 - CV, \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 0. \end{cases}$$

Il vient :

$$\frac{\lambda}{r_2} = \frac{\mu}{-r_1} = \frac{\lambda + \mu}{r_2 - r_1} = \frac{q_0 - CV}{r_2 - r_1}$$

soit

$$\lambda = r_2 \frac{q_0 - CV}{r_2 - r_1} \text{ et } \mu = -r_1 \frac{q_0 - CV}{r_2 - r_1}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} q_G(t) &= CV + \frac{q_0 - CV}{r_2 - r_1} \left(r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t} \right), \\ i(t) &= \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} (q_0 - CV) \left(e^{r_1 t} - e^{r_2 t} \right) \end{aligned}$$

puis

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} q_G(t) = CV \text{ et } \lim_{t \to +\infty} i(t) = 0.}$$

• $\boxed{\Delta = 0}$ *i.e.* $R = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$. On note $r = \dfrac{R}{2L} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ la racine double et la solution générale est :

$$q_G(t) = CV + e^{-tr} (\lambda t + \mu) = CV + e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}} (\lambda t + \mu).$$

On détermine facilement les constantes λ et μ :

$$\mu = q_0 - CV \text{ et } \lambda = \mu r = (q_0 - CV) r = \frac{q_0 - CV}{\sqrt{LC}}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} q_G(t) &= CV + e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}} \left(\frac{q_0 - CV}{\sqrt{LC}} t + q_0 - CV \right), \\ &= CV + e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}} (q_0 - CV) \left(\frac{t}{\sqrt{LC}} + 1 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i(t) &= (q_0 - CV)\left[-\frac{1}{\sqrt{LC}}e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}+1\right) + e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}\frac{1}{\sqrt{LC}}\right],\\
&= (q_0 - CV)\frac{1}{\sqrt{LC}}e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}\left[-\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}+1\right)+1\right],\\
&= (q_0 - CV)\frac{1}{\sqrt{LC}}e^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}\left(-\frac{t}{\sqrt{LC}}\right).
\end{aligned}$$

On déduit alors que :

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} q_G(t) = CV \text{ et } \lim_{t\to+\infty} i(t) = 0.}$$

- $\boxed{\Delta < 0}$ *i.e.* $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$. On a donc deux racines complexes :

$$r_1 = \frac{-R + i\sqrt{-\Delta}}{2L} \text{ et } r_2 = \frac{-R - i\sqrt{-\Delta}}{2L}.$$

On obtient en posant $\omega = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2L} = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}$ les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
q_G(t) &= CV + e^{-\frac{R}{2L}t}\left(\lambda\sin(\omega t) + \mu\cos(\omega t)\right),\\
i(t) &= -\frac{R}{2L}e^{-\frac{R}{2L}t}\left(\lambda\sin(\omega t) + \mu\cos(\omega t)\right)\\
&\quad + e^{-\frac{R}{2L}t}\left(\lambda\omega\cos(\omega t) - \mu\omega\sin(\omega t)\right).
\end{aligned}$$

Puis, à $t = 0$ on sait que :

$$\begin{aligned}
q_0 &= CV + \mu \text{ } i.e. \text{ } \mu = q_0 - CV,\\
0 &= -\frac{R}{2L}\mu + \lambda\omega \text{ soit } \lambda = \frac{R}{2L\omega}(q_0 - CV)
\end{aligned}$$

de sorte que :

$$\begin{aligned}
q_G(t) &= CV + (q_0 - CV)e^{-\frac{R}{2L}t}\left(\cos(\omega t) + \frac{R}{2L\omega}\sin(\omega t)\right),\\
i(t) &= -\frac{q_0 - CV}{LC\omega}e^{-\frac{R}{2L}t}\sin(\omega t).
\end{aligned}$$

On a également présentement :

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} q_G(t) = CV \text{ et } \lim_{t\to+\infty} i(t) = 0. \blacksquare}$$

Exercice 2 : Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$\boxed{y'' + \omega^2 y = \sin^3 x \text{ avec } \omega \in \mathbb{R}_+^*.} \tag{12}$$

Indication : On pourra linéariser $\sin^3 x$ puis déterminer une solution particulière de (12) avec le principe de superposition des solutions. ■

Réponse : On met en place ici la méthode développée dans l'exercice 1 du paragraphe "Formule de Moivre et formule d'Euler". On écrit :

$$\begin{aligned}
\sin^3 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i2x} + e^{-i2x} - 2}{4i^2}\right), \\
&= \frac{e^{i3x} + e^{-ix} - 2e^{ix} - e^{ix} - e^{-i3x} + 2e^{-ix}}{-8i}, \\
&= -\frac{1}{4}\left[\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i} - 3\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right], \\
&= -\frac{1}{4}\left[\sin(3x) - 3\sin x\right] = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x).
\end{aligned}$$

On est donc amené à résoudre l'équation différentielle d'ordre 2 suivante :

$$y'' + \omega^2 y = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x).$$

On introduit les deux équations différentielles d'ordre 2 suivantes :

$$y'' + \omega^2 y = \sin x, \tag{13}$$

$$y'' + \omega^2 y = \sin(3x). \tag{14}$$

Ces précisions faites, on peut passer effectivement à la partie résolution de (12). On considère l'équation homogène

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

à laquelle on lui associe l'équation caractéristique suivante :

$$r^2 + \omega^2 = 0.$$

Cette dernière admet deux racines complexes conjuguées

$$r_1 = i\omega \text{ et } r_2 = -i\omega.$$

La solution de l'équation homogène est par conséquent :

$$y_H(x) = \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x) \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Cherchons maintenant une solution particulière de (13). Le second membre de cette équation étant la fonction $x \mapsto \sin x$, il existe des arguments théoriques pour rechercher une solution particulière. Deux cas sont à envisager ici :

• si $\omega \neq 1$ alors, puisque i n'est pas racine de l'équation caractéristique, (13) admet comme solution la fonction

$$y_{1,P}(x) = \alpha(x)\cos x + \beta(x)\sin x$$

avec $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}[X])^2$ et $\sup(\deg\alpha, \deg\beta) = 0$. Ainsi, les fonctions α et β sont en fait des constantes. Dans les faits,

$$y'_{1,P}(x) = -\alpha\sin x + \beta\cos x$$

$$y''_{1,P}(x) = -\alpha\cos x - \beta\sin x$$

et donc

$$y''_{1,P} + \omega^2 y_{1,P} = \sin x \Leftrightarrow -\alpha\cos x - \beta\sin x + \omega^2(\alpha\cos x + \beta\sin x) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \alpha\left(\omega^2 - 1\right)\cos x + \left(\beta\left(\omega^2 - 1\right) - 1\right)\sin x = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha\left(\omega^2 - 1\right) = 0, \\ \beta\left(\omega^2 - 1\right) - 1 = 0 \end{cases} \overset{\omega \neq 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \alpha = 0, \\ \beta = \dfrac{1}{\omega^2 - 1} \end{cases}
\end{aligned}$$

soit

$$y_{1,P}(x) = \frac{1}{\omega^2 - 1}\sin x.$$

• si $\omega = 1$ alors i est racine de l'équation caractéristique de sorte que (13) admette comme solution la fonction

$$y_{1,P}(x) = \alpha'(x)\cos x + \beta'(x)\sin x$$

avec $\left(\alpha', \beta'\right) \in (\mathbb{R}[X])^2$ et $\sup\left(\deg\alpha', \deg\beta'\right) = 1 + 0 = 1$. Ainsi,

$$y_{1,P}(x) = (\alpha_1 x + \alpha_2)\cos x + (\beta_1 x + \beta_2)\sin x$$

$$\begin{aligned}
y'_{1,P}(x) &= \alpha_1\cos x - (\alpha_1 x + \alpha_2)\sin x + \beta_1\sin x + (\beta_1 x + \beta_2)\cos x \\
&= (\alpha_1 + \beta_1 x + \beta_2)\cos x + (\beta_1 - \alpha_1 x - \alpha_2)\sin x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y''_{1,P}(x) &= \beta_1\cos x - (\alpha_1 + \beta_1 x + \beta_2)\sin x - \alpha_1\sin x + (\beta_1 - \alpha_1 x - \alpha_2)\cos x \\
&= (\beta_1 + \beta_1 - \alpha_1 x - \alpha_2)\cos x + (-\alpha_1 - (\alpha_1 + \beta_1 x + \beta_2))\sin x \\
&= (2\beta_1 - \alpha_1 x - \alpha_2)\cos x + (-2\alpha_1 - \beta_1 x - \beta_2)\sin x
\end{aligned}$$

puis

$$y''_{1,P} + \omega^2 y_{1,P} = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (2\beta_1 - \alpha_1 x - \alpha_2)\cos x + (-2\alpha_1 - \beta_1 x - \beta_2)\sin x \\ +\omega^2 \left((\alpha_1 x + \alpha_2)\cos x + (\beta_1 x + \beta_2)\sin x\right) \end{array} \right\} = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[(2\beta_1 - \alpha_1 x - \alpha_2) + \omega^2 (\alpha_1 x + \alpha_2)\right]\cos x \\ + \left[(-2\alpha_1 - \beta_1 x - \beta_2) + \omega^2 (\beta_1 x + \beta_2)\right]\sin x \end{array} \right\} = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (2\beta_1 - \alpha_1 x - \alpha_2) + \omega^2 (\alpha_1 x + \alpha_2) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ (-2\alpha_1 - \beta_1 x - \beta_2) + \omega^2 (\beta_1 x + \beta_2) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(-\alpha_1 + \omega^2\alpha_1\right) x + 2\beta_1 - \alpha_2 + \omega^2\alpha_2 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ \left(-\beta_1 + \omega^2\beta_1\right) x - 2\alpha_1 - \beta_2 + \omega^2\beta_2 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$\overset{\omega=1}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} 2\beta_1 - \alpha_2 + \alpha_2 = 0, \\ -2\alpha_1 - \beta_2 + \beta_2 = 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = 0, \\ -2\alpha_1 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = 0, \\ \alpha_1 = -\dfrac{1}{2}. \end{array} \right.$$

Concrètement,

$$y_{1,P}(x) = \left(-\frac{1}{2}x + \alpha_2\right)\cos x + \beta_2 \sin x \text{ avec } (\alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{R}^2.$$

On prendra par la suite $(\alpha_2, \beta_2) = (0, 0)$, choix qui conduit à la solution particulière suivante :

$$y_{1,P}(x) = -\frac{1}{2}x\cos x.$$

Concernant l'équation (14), la théorie indique deux autres cas :

• si $\omega \neq 3$ alors (14) $3i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique et (14) admet comme solution particulière :

$$y_{2,P}(x) = \alpha(x)\cos(3x) + \beta(x)\sin(3x)$$

avec $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}[X])^2$ et $\sup(\deg\alpha, \deg\beta) = 0$. Donc

$$y_{2,P}(x) = \alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x)$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Dans les faits,

$$y'_{2,P}(x) = -3\alpha\sin(3x) + 3\beta\cos(3x)$$

$$y''_{2,P}(x) = -9\alpha\cos(3x) - 9\beta\sin(3x)$$

et

$$y''_{2,P} + \omega^2 y_{2,P} = \sin(3x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -9\alpha\cos(3x) - 9\beta\sin(3x) + \omega^2\left(\alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x)\right) = \sin(3x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[-9\alpha+\omega^2\alpha\right]\cos(3x)+\left[-9\beta+\omega^2\beta\right]\sin(3x)=\sin(3x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -9\alpha+\omega^2\alpha=0, \\ -9\beta+\omega^2\beta=1 \end{cases} \overset{\omega\neq 3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \alpha=0, \\ \beta=\dfrac{1}{\omega^2-9}. \end{cases}$$

Ainsi,

$$y_{2,P}(x)=\frac{1}{\omega^2-9}\sin(3x).$$

• si $\omega=3$ alors $3i$ est racinde de l'équation caractéristique et (14) admet comme solution particulière :

$$y_{2,P}(x)=\alpha'(x)\cos(3x)+\beta'(x)\sin(3x)$$

avec $\left(\alpha',\beta'\right)\in(\mathbb{R}[X])^2$ et $\sup\left(\deg\alpha',\deg\beta'\right)=1+0=1$. On cherche donc $y_{2,P}$ sous la forme :

$$y_{2,P}(x)=\left[\alpha'_1x+\alpha'_2\right]\cos(3x)+\left[\beta'_1x+\beta'_2\right]\sin(3x).$$

Alors

$$y'_{2,P}(x)=\alpha'_1\cos(3x)-3\left[\alpha'_1x+\alpha'_2\right]\sin(3x)+\beta'_1\sin(3x)+3\left[\beta'_1x+\beta'_2\right]\cos(3x),$$

$$\begin{aligned} y''_{2,P}(x) &= -3\alpha'_1\sin(3x)-3\alpha'_1\sin(3x)-9\left[\alpha'_1x+\alpha'_2\right]\cos(3x) \\ &\quad +3\beta'_1\cos(3x)+3\beta'_1\cos(3x)-9\left[\beta'_1x+\beta'_2\right]\sin(3x), \\ &= \left[-6\alpha'_1-9\left(\beta'_1x+\beta'_2\right)\right]\sin(3x)+\left[-9\left(\alpha'_1x+\alpha'_2\right)+6\beta'_1\right]\cos(3x) \end{aligned}$$

puis

$$y''_{2,P}+\omega^2y_{2,P}=\sin(3x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[-6\alpha'_1-9\left(\beta'_1x+\beta'_2\right)\right]\sin(3x) \\ +\left[-9\left(\alpha'_1x+\alpha'_2\right)+6\beta'_1\right]\cos(3x) \\ +\omega^2\left[\begin{array}{l} \left[\alpha'_1x+\alpha'_2\right]\cos(3x) \\ +\left[\beta'_1x+\beta'_2\right]\sin(3x) \end{array}\right] \end{array}\right\}=\sin(3x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} -6\alpha'_1-9\left(\beta'_1x+\beta'_2\right) \\ +\omega^2\left(\beta'_1x+\beta'_2\right) \end{array}\right]\sin(3x) \\ +\left[\begin{array}{l} -9\left(\alpha'_1x+\alpha'_2\right)+6\beta'_1 \\ +\omega^2\left[\alpha'_1x+\alpha'_2\right] \end{array}\right]\cos(3x) \end{array}\right\}=\sin(3x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} -6\alpha'_1-9\left(\beta'_1x+\beta'_2\right) \\ +9\left(\beta'_1x+\beta'_2\right) \end{array}\right]\sin(3x) \\ +\left[\begin{array}{l} -9\left(\alpha'_1x+\alpha'_2\right)+6\beta'_1 \\ +9\left[\alpha'_1x+\alpha'_2\right] \end{array}\right]\cos(3x) \end{array}\right\}=\sin(3x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad -6\alpha'_1\sin(3x)+6\beta'_1\cos(3x)=\sin(3x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad -6\alpha'_1=1 \text{ et } \beta'_1=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha'_1=-\frac{1}{6} \text{ et } \beta'_1=0.$$

Par conséquent,

$$y_{2,P}(x)=\left[-\frac{1}{6}x+\alpha_2'\right]\cos(3x)+\beta_2'\sin(3x)$$

avec $\left(\alpha_2',\beta_2'\right)\in\mathbb{R}^2$. On optera par la suite pour $\left(\alpha_2',\beta_2'\right)=(0,0)$ soit

$$y_{2,P}(x)=-\frac{1}{6}x\cos(3x).$$

En conclusion,

• si $\omega\notin\{1,3\}$ alors la solution générale de (12) est :

$$\boxed{y_G(x)=\lambda\cos(\omega x)+\mu\sin(\omega x)+\frac{3}{4(\omega^2-1)}\sin x-\frac{1}{4(\omega^2-9)}\sin(3x)}$$

avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$

• si $\omega=1$ alors la solution générale de (12) est :

$$y_G(x)=\lambda\cos x+\mu\sin x+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}x\cos x\right)-\frac{1}{4(\omega^2-9)}\sin(3x)$$

soit

$$\boxed{y_G(x)=\left(\lambda-\frac{3}{8}x\right)\cos x+\mu\sin(x)+\frac{1}{32}\sin(3x)}$$

avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$

• si $\omega=3$ alors la solution générale de (12) est :

$$y_G(x)=\lambda\cos(3x)+\mu\sin(3x)+\frac{3}{4}\frac{1}{\omega^2-1}\sin x-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{6}\right)x\cos(3x)$$

soit

$$\boxed{y_G(x)=\left(\lambda+\frac{1}{24}x\right)\cos(3x)+\mu\sin(3x)+\frac{3}{32}\sin x}$$

avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. ■

9 Calcul intégral

9.1 Calcul intégral en 1D

9.1.1 Calcul de primitives

Exercice 1 : Calculer une primitive des fonctions suivantes :
a) $\dfrac{x+1}{\left(x^2+2x\right)^3}$,
b) $\dfrac{x}{x^2-1}$,
c) $x-1+\dfrac{\ln x}{x}$. ■

Réponse :

a) La fonction $x \mapsto \dfrac{x+1}{\left(x^2+2x\right)^3}$ est définie sur $\mathbb{R}-\{-2,0\}$ et est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}-\{-2,0\}$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{\left(x^2+2x\right)^3} &= \frac{1}{2}\frac{2x+2}{\left(x^2+2x\right)^3} = \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{\left(u(x)\right)^3} = \frac{1}{2}u'(x)\left(u(x)\right)^{-3}, \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{-2}(-2)\,u'(x)\left(u(x)\right)^{-3}\end{aligned}$$

et par conséquent une primitive sur $\mathbb{R}-\{-2,0\}$ est

$$\boxed{-\frac{1}{4}\frac{1}{\left(x^2+2x\right)^2}.}$$

L'ensemble des primitives de $x \mapsto \dfrac{x+1}{\left(x^2+2x\right)^3}$ est

$$\boxed{\left\{-\frac{1}{4}\frac{1}{\left(x^2+2x\right)^2}+k, k\in\mathbb{R}\right\}.}$$

b) La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x^2-1}$ est définie sur $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ et est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}-\{-1,1\}$. On a :

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2-1}$$

et par conséquent une primitive sur $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ est

$$\boxed{\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|.}$$

L'ensemble des primitives de $x \mapsto \dfrac{x}{x^2-1}$ est

$$\boxed{\left\{\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+k, k \in \mathbb{R}\right\}.}$$

c) La fonction $x \mapsto x - 1 + \dfrac{\ln x}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$x - 1 + \frac{\ln x}{x} = x - 1 + \frac{1}{x}\ln x = x - 1 + u'(x)\, u(x) = x - 1 + \frac{1}{2} * 2u'(x)\, u(x)$$

et donc une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}u^2(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\ln^2 x.$$

L'ensemble des primitives de $x \mapsto x - 1 + \dfrac{\ln x}{x}$ est

$$\boxed{\left\{\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\ln^2 x + k, k \in \mathbb{R}\right\}. \blacksquare}$$

<u>Exercice 2 :</u> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(\sin^2 x - 3\sin x + 8\right)\cos x.$$

Déterminer sur $\mathbb{R}$ la primitive F de f telle que :

$$F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0. \blacksquare$$

<u>Réponse :</u> Il vient :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sin^2 x - 3\sin x + 8\right)\cos x = \cos x \sin^2 x - 3\cos x \sin x + 8\cos x, \\ &= u'(x)\, u^2(x) - 3u'(x)\, u(x) + u'(x) \end{aligned}$$

en posant $u(x) = \sin x$. D'où

$$F(x) = \frac{1}{3}u^3(x) - \frac{3}{2}u^2(x) + 8u(x) + k$$

avec $k \in \mathbb{R}$. Il reste plus qu'à déterminer la constante k. On veut :

$$F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

soit
$$\frac{1}{3}\sin^3\left(\frac{3\pi}{2}\right)-\frac{3}{2}\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}\right)+8\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)+k=0$$
et donc
$$-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}-8+k=0$$
i.e.
$$k=8+\frac{1}{3}+\frac{3}{2}=\frac{48+2+9}{6}=\frac{59}{6}.$$
En conclusion,
$$F(x)=\frac{1}{3}u^3(x)-\frac{3}{2}u^2(x)+8u(x)+\frac{59}{6}$$
soit
$$\boxed{F(x)=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{3}{2}\sin^2 x+8\sin x+\frac{59}{6}.\ \blacksquare}$$

9.1.2 Calcul d'intégrales

On rappelle ici trois résultats théoriques incontournables et basiques du calcul intégral en dimension 1.

Théorème : **Formule d'intégration par parties.**
Soient f et g deux fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$. On a :
$$\boxed{\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx=[f(x)\,g(x)]_a^b-\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx.\ \blacksquare}$$

Exercice : Calculer $\displaystyle\int_0^1 x\,(arc\tan x)\,dx.$

Réponse : Les fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto Arc\tan x$ sont deux fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[0,1]$. Clairement, une primitive de $x\mapsto x$ est $x\mapsto\dfrac{x^2+1}{2}$ et la dérivée de $Arc\tan$ est $x\mapsto\dfrac{1}{x^2+1}$ de sorte que la formule d'intégration par parties indique :
$$\begin{aligned}\int_0^1 xArc\tan x dx &= \left[\frac{x^2+1}{2}Arc\tan x\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^2+1}{2}\frac{1}{x^2+1}dx,\\ &= \left[\frac{x^2+1}{2}Arc\tan x\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}dx,\\ &= Arc\tan 1-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.\ \blacksquare\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Voir feuille d'exercices supplémentaires}}$

$\boxed{\text{FIN DE LA REMISE A NIVEAU}}$