Formulaire Transformée Laplace

- Calcul de la transformée de Laplace d'une fonction

  - $\mathcal{L}[f(x)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt \quad , avec\ z = a + ib \in \mathbb{C}$

- Calcul de la transformée inverse

  - $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z)e^{zt}dz$

- Transformées de Laplace usuelles

Fonction	Transformée de Laplace
e^{at}	$\frac{1}{z-a}$
$sin(at)$	$\frac{a}{z^2+a^2}$
$cos(at)$	$\frac{z}{z^2+a^2}$
t^n	$\frac{n!}{z^{n+1}}$
$t^n e^{(at)}$	$\frac{n!}{(z-a)^{n+1}}$
$sinh(at)$	$\frac{a}{z^2-a^2}$
$cosh(at)$	$\frac{z}{z^2-a^2}$

❖ Règles de calcul

Fonction	Transformée de Laplace
$\boldsymbol{f(kt)}$	$\frac{1}{k}F\left(\frac{z}{k}\right)$
$\boldsymbol{e^{(at)}f(t)}$	$F(z-a)$
$\boldsymbol{f(t-t_0)}$	$e^{-zt_0}F(z)$
$\boldsymbol{t^n f(t)}$	$(-1)^n F^{(n)}(z)$
$\boldsymbol{f * g}$	$F(z).G(z)$
$\boldsymbol{f'}$	$zF(z)-\lim_{0^+} f$
$\boldsymbol{f^{(n)}}$	$z^nF(z)-\sum_{k=0}^{n-1}\left(p^k f^{(n-k)}(0)\right)$
$\boldsymbol{\int_0^t f(t)dt}$	$\frac{F(z)}{z}$
$\boldsymbol{\frac{f(t)}{t}}$	$\int_x^{+\infty} F(u)du$
$-\boldsymbol{xf}(x)$	$F'(p)$

❖ Propriétés

- $\lim_0 f = \lim_{+\infty} xF(x)$
- $\lim_{+\infty} f = \lim_0 xF(x)$