E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs

MATHEMATIQUES POUR L' INGENIEUR

Corrigé du **Devoir surveillé n^0 2 (Analyse)**
donné le 6 février 2007
(Durée 2h.)

I

Evaluer l'intégrale suivante par application de deux méthodes différentes :
(a.) Application du th. des Résidus.
(b.) Application d'une des formules intégrales de Cauchy.

$$I = \oint_C \frac{(3z^2+2)}{(z^2+9)(z-1)^2}$$

où C est un cercle de rayon $|z| = 2$.

II

On étudie le problème de l'évolution dynamique d'un système physique dont l'état (en fonction du temps) est décrit par la fonction f, qui vérifie l'équation integrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g_2(t-u) du = g_1(t) \qquad (D.0)$$

En supposant que $f,\ g_1,\ g_2 \in L^2$ avec

$$g_1 = \frac{1}{t^2+36}; \qquad g_2 = \frac{1}{t^2+9}$$

(et que leurs transformées de Fourier existent dans l'espace dual L^{2*}),
résoudre ce problème en réalisant les étapes suivantes.

$a)$

Calculer la transformée de Fourier en cosinus de $g_1(t)$, $\mathcal{F}_c[g_1](\alpha)$ en utilisant les 4 étapes de la méthode des fonctions analytiques (Contour de Jordan attention $\alpha > 0$)

$\tilde{a})$

D'après le résultat du $a)$ donner directement (par analogie) la transformée de Fourier en cosinus de $g_2(t)$, $\mathcal{F}_c[g_2](\alpha)$

$b)$ Appliquer la transformée de Fourier en cosinus aux 2 membres de $(D.0)$ en utilisant aussi le théorème de la convolution correspondant :

$$(RAPPEL: \qquad \mathcal{F}_c[h_1 * h_2](\alpha) = 2\mathcal{F}_c[h_1]\mathcal{F}_c[h_2])$$

et trouver la transformée de Fourier en cosinus de la fonction inconnue f : $\mathcal{F}_c[f](\alpha)$

$c)$ Appliquer le théorème de la transformée de Fourier inverse en cosinus et donner la solution $f(t)$ du problème $(D.0)$

III (7 *Pts.*)

On étudie le problème de l'évolution dynamique d'un système physique dont l'état est décrit par la fonction f (fonction du temps), qui vérifie l'équation différentielle suivante :

$$(\mathcal{P}) \qquad \frac{d^2f(t)}{dt^2} + 9f(t) = 8\sin t$$

en supposant que :

$$\frac{df}{dt}_{|_{t=0}} = 0; \qquad f(t=0) = 1$$

Résoudre ce problème en 2 étapes :

a) Par application de la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation $(\mathcal{P})$ trouver $L(p)$.

b) Par application de la transformée de *Laplace inverse* et des propriétés des fonctions analytiques (*contour de Bromwitch* et 4 étapes) trouver la solution f de l'équation différentielle.

C, 1

DIFORTI Lisa ING1 06/02/2007

19,5/20

Examen d'Analyse.

I - $I = \oint_{\mathcal{C}} \frac{(3z^2+2)}{(z^2+9)(z-1)^2} dz$.

$\mathcal{C}$ cercle de rayon $|z| = 2$.

le pôle $P_1 = 1$ est dans le contour, ordre 2

le pôle $P_2 = 3i$ n'est pas dans le contour, ordre 1

le pôle $P_3 = -3i$ n'est pas dans le contour., ordre 1.

(a) application du théorème des résidus

on a : $\oint_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\text{pôles}} \operatorname{Res} f$.

ici $f(z) = \frac{3z^2+2}{(z^2+9)(z-1)^2}$.

$$\operatorname{Res} f|_{P_1=1} = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 f(z)\right]$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left(\frac{3z^2+2}{z^2+9}\right).$$

$$= \lim_{z \to 1} \left(\frac{50z}{(z^2+9)^2} \right)$$

$$= \frac{50}{100} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

seuls les pôles à l'intérieur du contour comptent, donc on a:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \left(\tfrac{1}{2}\right) = \pi i$$

$$I = \pi i$$

(b) application d'une des formules intégrales de Cauchy.

cette formule donne: $f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i} \oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$.

ici $I = \oint_C \dfrac{(3z^2+2)}{(z^2+9)(z-1)^2} dz$.

donc $\begin{cases} f(z) = \dfrac{(3z^2+2)}{(z^2+9)} \\ z_0 = 1 \\ n = 1. \end{cases}$

donc $f'(1) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_C \dfrac{3z^2+2}{(z^2+9)(z-1)^2} dz$.

$f(z) = \dfrac{3z^2+2}{(z^2+9)}$; $f'(z) = \dfrac{6z(z^2+9)-(3z^2+2)2z}{(z^2+9)^2}$

$$= \frac{6z^3+54z-6z^3-4z}{(z^2+9)^2}$$

$$= \frac{50z}{(z^2+9)^2}$$

donc $f'(1) = \frac{50}{100} = 1/2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{3z^2+2}{(z^2+9)(z-1)^2} dz$

donc $\oint_{\mathcal{C}} \frac{(3z^2+2)}{(z^2+9)(z-1)^2} dz = \frac{2\pi i}{2} = \pi i$

II. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g_2(t-u) du = g_1(t)$ (D.O).

$g_1 = \frac{1}{t^2+36}$ $g_2 = \frac{1}{t^2+9}$.

a) $F_c[g_1](\alpha) = \int_0^{\infty} g_1(x) \cos(\alpha x) dx$.

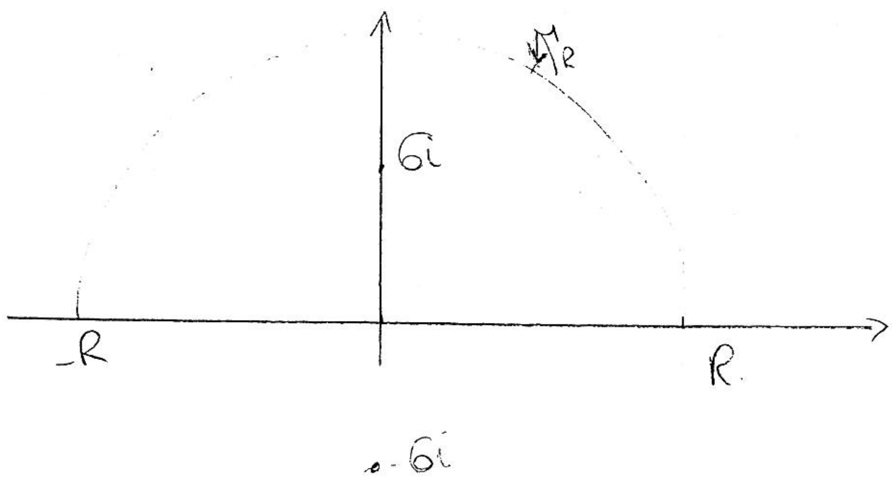
$= \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(x) e^{i\alpha x} dx \right)$

$= \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2+36} dx}_{I_1} \right)$.

calculons I_1.

$I_R = \int_{\mathcal{C}_R} \frac{e^{iz\alpha}}{z^2+36} dz$.

$\mathcal{C}_R = [-R, R] \cup \Gamma_R$.



$\alpha>0$, on prend le 1/2 cercle supérieur donc seul le pôle $P_1 = 6i$ est dans le contour ainsi défini.

$$I_R = \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2+36}\,dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{i\alpha z}}{z^2+36}\,dz.$$

or $$I_R = \oint_{C_R} \frac{e^{iz\alpha}}{z^2+36}\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{\text{pôles}\\ \text{de } C_R}} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{i\alpha z}}{z^2+36}\right).$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{i\alpha z}}{z^2+36}\right)_{6i} = \lim_{z\to 6i} \left(\frac{e^{i\alpha z}\cancel{(z-6i)}}{(z+6i)\cancel{(z-6i)}}\right).$$
$$= \frac{e^{-6\alpha}}{12i}$$

donc $$I_R = \cancel{2}\pi \cancel{i} \left(\frac{e^{-6\alpha}}{{}_6\cancel{12}\cancel{i}}\right) = \frac{\pi e^{-6\alpha}}{6}.$$

$$\lim_{R\to\infty} I_R = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2+36}\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} \frac{e^{i\alpha z}}{z^2+36}\,dz.$$

on vérifie les conditions du lemme de Jordan:

$$\left|\frac{e^{i\alpha z}}{z^2+36}\right| = \frac{|e^{i\alpha(Re(z)+i\,Im(z))}|}{|R^2e^{i2\theta}+36|} \qquad z = Re(z)+i\,Im(z) = Re^{i\theta}.$$
$$= \frac{|e^{-Im(z)\alpha}|}{R^2|\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)+36/R^2|}$$
$$= \frac{|e^{-Im(z)\alpha}|}{R^2\sqrt{(\cos 2\theta+36/R^2)^2+\sin^2 2\theta}}$$
$$= \frac{|e^{-Im(z)\alpha}|}{R^2\sqrt{\cos^2 2\theta+\frac{1296}{R^4}+\frac{72\cos 2\theta}{R^2}+\sin^2 2\theta}}$$
$$= \frac{|e^{-Im(z)\alpha}|}{R^2\sqrt{1+\frac{1296}{R^4}+\frac{72\cos 2\theta}{R^2}}}$$
$$\leq \frac{M}{R^2}.$$

Q. 5

DI FORTI Lisa ING1 05/07/2007

les conditions du lemme de Jordan sont vérifiées donc

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{i\alpha z}}{z^2+36}\, dz = 0$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2+36}\, dx$$

$$= \lim_{R \to \infty} I_R$$

$$= \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2+36}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{6} e^{-6\alpha}.$$

donc

$$F_c[g_1](\alpha) = \frac{1}{2} I_1 = \frac{\pi}{12} e^{-6\alpha}$$

a) par analogie $F_c[g_2](\alpha) = \frac{\pi}{6} e^{-3\alpha}$

b) (D.O) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g_2(t-u)\, du = g_1(t)$.

$$\Leftrightarrow \quad (f * g_2)(t) = g_1(t).$$

on applique la transformée de Fourier en cosinus aux 2 membres de l'équation.

$$F_c[(f*g_2)(t)] = F_c[g_1(t)]$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\, F_c[f]\, F_c[g_2] = F_c[g_1].$$

Soit $I = \frac{1}{2} \operatorname{Re} I_1 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi e^{-6\alpha}}{6} = \frac{\pi e^{-6\alpha}}{12}$ C,5

ã) Par analogie, on a :

$$F_c [g_2](\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2+9}\, dx = \frac{\pi e^{-3\alpha}}{2 \times 3} = \frac{\pi e^{-3\alpha}}{6}$$

) Appliquons la transformée de Fourier en cosinus aux 2 membres (D.O) :

$$g_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g_2(t-u)\, du.$$

$$\Leftrightarrow \quad g_1(t) = (f * g_2)(t).$$

$$\Leftrightarrow \quad F_c^1 [g_1] = F_c^1 [f * g_2]$$

$$\Leftrightarrow \quad F_c^1 [g_1] = 2 F_c^1 [f] \times F_c^1 [g_2]$$

$$\Leftrightarrow \quad F_c^1 [f] = \frac{1}{2} \frac{F_c^1 [g_1]}{F_c^1 [g_2]}.$$

d'où d'après les questions précédentes, on a :

$$F_c^1 [f] = \frac{1}{2} \frac{\pi e^{-6\alpha}}{12} \times \frac{6}{\pi e^{-3\alpha}} = \frac{1}{2} \frac{e^{-3\alpha}}{2} = \frac{e^{-3\alpha}}{4}$$

) Appliquons à présent la transformé de Fourier inverse en cosinus :

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_c [f] \cos \alpha x \, d\alpha.$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-3\alpha}}{2} \cos \alpha x \quad d\alpha. \quad \text{car } \cos \alpha x = \frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\pi} \frac{1}{\cancel{2}} \int_0^{+\infty} e^{-3\alpha} \left[\frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2} \right] d\alpha.$$

$$= \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(e^{-3\alpha + i\alpha x} + e^{-3\alpha - i\alpha x} \right) d\alpha.$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left[e^{-\alpha [3 - ix]} + e^{-\alpha [3 + ix]} \right] d\alpha.$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\alpha(3-ix)} + e^{-\alpha(3+ix)} \right) d\alpha .$$ C,6

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\alpha(3-ix)} \, d\alpha + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha(3+ix)} \, d\alpha \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\lim_{X \to +\infty} \left[\frac{e^{-\alpha(3-ix)}}{-(3-ix)} \right]_0^X + \lim_{X \to +\infty} \left[\frac{e^{-\alpha(3+ix)}}{-(3+ix)} \right]_0^X \right)$$

or $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^{-X(3+ix)}}{-(3+ix)} \to 0$ car $Re(3+ix) > 0$

(et idem pour la limite de la 2^e fonction).

$$= \frac{1}{2\pi} \left[- \frac{1}{-(3-ix)} + \left(- \frac{1}{-(3+ix)} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{(3-ix)} + \frac{1}{(3+ix)} \right) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{3+\cancel{ix}+3-\cancel{ix}}{(3-ix)(3+ix)} \right] = \frac{6}{2\pi(9+x^2)} = \frac{3}{\pi(}$$

Soit $f(t) = \frac{3}{\pi(9+t^2)}$

Soit (P) $\frac{d^2f(t)}{dt^2} + 9f(t) = 8\sin t$.

Condition Initiales : $\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0} = 0$

a) Appliquons la transformée de Laplace : $f(t=0) = 1$.

$\mathcal{L}\left(\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right) = p^2 L(f(t)) - pf(0^+) - f'(0^+)$. on pose $\mathcal{L}(f(t)) = Y$

$= p^2 Y - p$

D'où : $p^2 Y - p + 9Y = \mathcal{L}(8\sin t) = 8\mathcal{L}(\sin t) = 8 \times \frac{1}{p^2+1}$

$L(\sin(t)) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right) = \frac{1}{2i}\left[\mathcal{L}(e^{it}) - \mathcal{L}(e^{-it})\right] = \frac{1}{2i}\left(\int_0^{+\infty} e^{-pt+it} dt - \int_0^{+\infty} e^{-}\right.$ $-t(p-i)$

$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i}\right) = \frac{1}{2i} \times \frac{2i}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1}$

D'où : $p^2 Y - p + 9Y = \frac{8}{p^2+1}$

0,7 (3

DIFORTI Lisa ING1 06/04/2007

IV. (P) $\frac{d^2f(t)}{dt^2} + 9f(t) = 8\sin(t)$.

$\left.\frac{df}{dt}\right|_0 = 0 \quad f(t=0) = 1$.

a). on applique la transformée de Laplace aux 2 membres :

$$\mathcal{L}[f''] = p\mathcal{L}[f'] - f'(0)$$
$$= p\left(p\mathcal{L}[f] - f(0)\right) - f'(0).$$
$$= p^2\mathcal{L}[f] - pf(0) - f'(0).$$
$$= p^2\mathcal{L}[p] - p$$

$$\mathcal{L}[\sin(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right] = \frac{1}{2i}\mathcal{L}[e^{it}] - \frac{1}{2i}\mathcal{L}[e^{-it}].$$

$$= \frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{-pt}e^{it}dt - \frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{-pt}e^{-it}dt$$

$$= \frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{t(i-p)}dt - \frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{-t(i+p)}dt$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\left[\frac{e^{t(i-p)}}{i-p}\right]_0^\infty + \left[\frac{e^{-t(i+p)}}{i+p}\right]_0^\infty\right).$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{i+p}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{i+p-p+i}{p^2+1}\right) = \frac{1}{p^2+1}.$$

donc on a avec $\mathcal{L}[f] = L(p)$:

$$p^2L(p) - p + 9L(p) = \frac{8}{p^2+1}$$

$$(p^2+9)L(p) = \frac{8}{p^2+1} + p = \frac{8 + (p^2+1)p}{p^2+1}$$

$$L(p) = \frac{8}{(p^2+1)(p^2+9)} + \frac{p}{p^2+9} = \frac{8 + p^3 + p}{(p^2+1)(p^2+9)}$$

C.8

on a donc: $L(p) = \dfrac{8+p+p^3}{(p^2+1)(p^2+9)}$

b) on veut $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[L(p)]$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{8+p+p^3}{(p^2+1)(p^2+9)}\right]$$

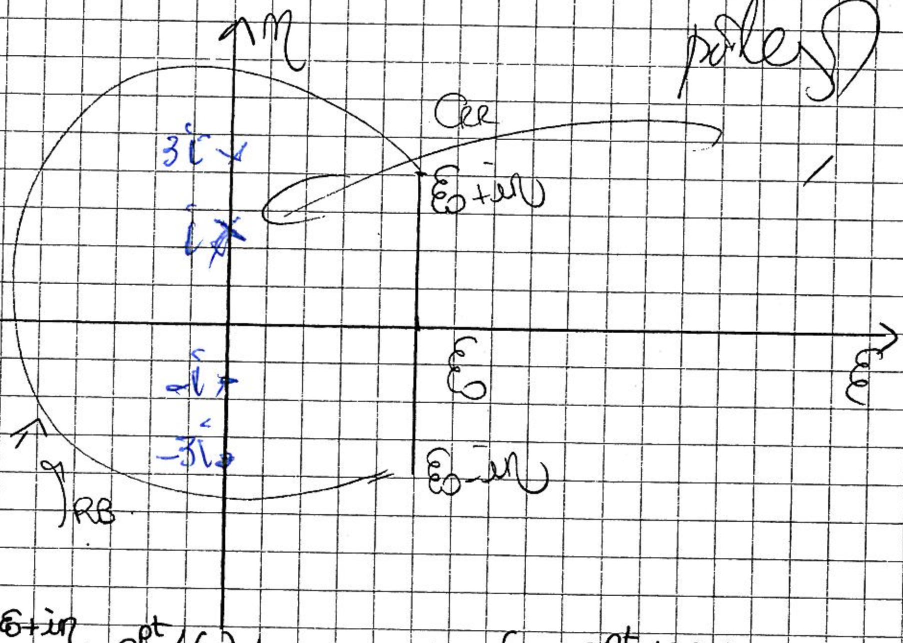
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e^{pt}(8+p+p^3)}{(p^2+1)(p^2+9)}\right)dp.$$

on définit

$$I_{C_{RB}} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{RB}} e^{pt}L(p)\,dp.$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{RB}} \frac{e^{pt}(8+p+p^3)}{(p^2+1)(p^2+9)}\,dp.$$

avec $C_{RB} = [\varepsilon_0 - i\eta\,;\,\varepsilon_0 + i\eta] \cup \Gamma_{RB}$.



donc $I_{C_{RB}} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\varepsilon_0 - i\eta}^{\varepsilon_0 + i\eta} e^{pt}L(p)\,dp + \dfrac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{RB}} e^{pt}L(p)\,dp$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\varepsilon_0 - i\eta}^{\varepsilon_0 + i\eta}\frac{e^{pt}(8+p+p^3)}{(p^2+1)(p^2+9)}\,dp + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{e^{pt}(8+p+p^3)}{(p^2+1)(p^2+9)}\,dp.$$

C, 9

OR $I_{CEB} = \frac{2\pi i}{2\pi i} \sum_{\text{pôles}} \text{Res}\left(e^{pt} L(p)\right)$.

les pôles sont $\begin{cases} P_1 = i \\ P_2 = -i \\ P_3 = 3i \\ P_4 = -3i \end{cases}$ pôles simples.

on calcule les résidus

$$\text{Res}\left(e^{pt} L(p)\right)_{p_1 = i} = \lim_{p \to i} \left(\frac{e^{pt}(8 + p + p^3)}{(p+i)(p^2+9)} \right)$$

$$= \frac{e^{it}(8 + i - i)}{2i(-1+9)} = \frac{e^{it} \times 8}{2i \times 8} = \frac{e^{it}}{2i}$$

$$\text{Res}\left(e^{pt} L(p)\right)_{p_2 = -i} = \lim_{p \to -i} \left(\frac{e^{pt}(8 + p + p^3)}{(p-i)(p^2+9)} \right)$$

$$= \frac{e^{-it}(8 - i + i)}{-2i(-1+9)} = \frac{e^{-it} \cdot 8}{-2i \cdot 8} = -\frac{e^{-it}}{2i}$$

$$\text{Res}\left(e^{pt} L(p)\right)_{p_3 = 3i} = \lim_{p \to 3i} \left(\frac{e^{pt}(8 + p + p^3)}{(p^2+1)(p+3i)} \right)$$

$$= \frac{e^{3it}(8 + 3i - 27i)}{-8 \times 6i}$$

$$= \frac{e^{3it}(8 - 24i)}{-8 \times 6i} = -\frac{e^{3it}(1 - 3i)}{6i} = \frac{e^{3it}(i+3)}{6}$$

$$\text{Res}\left(e^{pt} L(p)\right)_{p_4 = -3i} = \lim_{p \to -3i} \left(\frac{e^{pt}(8 + p + p^3)}{(p^2+1)(p-3i)} \right)$$

$$= \frac{e^{-3it}(8 - 3it + 27i)}{-8(-6i)}$$

$$= \frac{e^{-3it}(8 + 24i)}{8 \times 6i}$$

$$= \frac{e^{-3it}(1 + 3i)}{6i} = -\frac{e^{-3it}(i - 3)}{6}$$

C, 10

$$\sum_{\text{pôles}} \operatorname{Res}\left(e^{pt}\mathcal{L}(p)\right) = \left[\frac{-e^{-it}}{2i} + \frac{e^{it}}{2i}\right] + \left[\frac{e^{3it}(i+3)}{6} - \frac{e^{-3it}(i-3)}{6}\right]$$

$$= \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right) + \left(\frac{e^{3it}(i+3)}{3\times 2} - \frac{e^{-3it}(i-3)}{3\times 2}\right)$$

$$= \sin(t) + \frac{1}{3}\left[3\left(\frac{e^{3it}+e^{-3it}}{2}\right) + \frac{i e^{3it} - i e^{-3it}}{2}\right]$$

$$= \sin t + \frac{1}{3}\left(3\cos(3t) - \frac{e^{3it}-e^{-3it}}{2i}\right)$$

$$= \sin(t) + \cos(3t) - \frac{1}{3}\sin(3t)$$

d'où

$$I_{C_{RB}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varepsilon_0 - i\eta}^{\varepsilon_0 + i\eta} e^{pt}\mathcal{L}(p)\,dp + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{RB}} e^{pt}\mathcal{L}(p)\,dp = \sum_{\text{pôles}} \operatorname{Res}\left(e^{pt}\mathcal{L}(p)\right)$$

$$\lim_{R\to\infty} I_{C_{RB}} = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\varepsilon_0 - i\eta}^{\varepsilon_0 + i\eta} e^{pt}\mathcal{L}(p)\,dp + \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} e^{pt}\mathcal{L}(p)\,dp$$

or $\left|\dfrac{e^{pt}(8+p+p^3)}{(p^2+1)(p^2+9)}\right| \leq \dfrac{|e^{\operatorname{Re}(p)t}|\,|R^3|}{|R|^4}$ car $p = Re^{i\theta}$

$$\leq \frac{|e^{\operatorname{Re}(p)t}|}{|R|}$$

$$\leq \frac{e^{-|\operatorname{Re}(p)|t}}{R} \leq \frac{M}{R}$$

on vérifie les conditions analogues au lemme de Jordan

donc $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} e^{pt}\mathcal{L}(p)\,dp = 0$.

donc $\displaystyle f(t) = \lim_{R\to\infty}\int_{\varepsilon_0 - i\eta}^{\varepsilon_0 + i\eta} e^{pt}\mathcal{L}(p)\,dp = \lim_{R\to\infty} I_{C_{RB}} = \sin(t) + \cos(t) - \frac{1}{3}\sin(3t)$.

$$\Rightarrow f(t) = \sin(t) + \cos(3t) - \frac{1}{3}\sin(3t).$$