E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs

MATHEMATIQUES POUR L' INGENIEUR
le 23 novembre 2009
ANALYSE (I) T.D.1
(Integration d' après Lebesgue- Transformée de Fourier)

1

Montrer l'équivalence des représentations de l'intégrale de Fourier suivantes :

i)

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha=0}^{+\infty}\int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t)\cos[\alpha(x-t)]dtd\alpha$$

et

$$f(x) = \int_{\alpha=0}^{+\infty}\{A(\alpha)\cos(\alpha x) + B(\alpha)\sin(\alpha x)\}d\alpha$$

avec :

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\alpha t)dt; \qquad B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\alpha t)dt.$$

ii)

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha=0}^{+\infty}\int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t)\cos[\alpha(x-t)]dtd\alpha$$

et

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\exp(i\alpha x)d\alpha$$

avec :

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-i\alpha x)dx$$

2

i) Refaire le calcul et la représentation graphique de l'exemple 2.1 du cours sur la transformée de Fourier de la fonction :

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & si & |x| < a \\ 0 & si & |x| > a \end{array} \right\}$$

ii) Utiliser ce résultat pour évaluer l'intégrale :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\alpha a)\cos(\alpha x)}{\alpha}d\alpha; \quad \text{en déduire la valeur de : } I_2 = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du.$$

3

i) Montrer le théorème de la convolution pour les transformées de Fourier $\mathcal{F}\{f\}$ et $\mathcal{F}\{g\}$.

ii) Montrer que :

$$f * g = g * f$$
$$f * (g * h) = (f * g) * h$$
$$f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$$

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
MATHEMATIQUES POUR L' INGENIEUR
le 30 novembre 2009
ANALYSE (I) T.D.2
(Integration d' après Lebesgue- Transformées de Fourier et de Laplace,)

1

On résoudra le problème physique de la détermination de la température $u(x,t)$ d'une barre mince et infinie dont la surface est isolée et la température initiale est $f(x)$, par application de la transformée de Fourier $\mathcal{F}$. La formulation mathématique est la suivante :

$$(P.0) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad u(x,0) = f(x), \qquad |u(x,t)| < M < \infty,$$

avec k une constate réelle strictement positive, $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}^{+*}$ (variables de la position et du temps respectivement). Les étapes à suivre sont :

i) Montrer que pour toute fonction $u(x,t)$ qui vérifie :

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0; \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0 \qquad \text{on a}$$

$$a) \quad \mathcal{F}\{\frac{\partial u}{\partial x}\} = i\alpha\mathcal{F} \qquad b) \quad \mathcal{F}\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\} = -\alpha^2\mathcal{F}\{u\} \qquad c) \quad \mathcal{F}\{\frac{\partial u}{\partial t}\} = \frac{\partial \mathcal{F}\{u\}}{\partial t}$$

$$(\text{Rappel :} \qquad \mathcal{F}\{u\}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\exp(-i\alpha x)dx \quad)$$

ii) Prendre la transformée de Fourier (par rapport à x) aux deux membres de $(P.0)$ et montrer que :

$$\frac{d\mathcal{F}\{u\}}{dt} = -k\alpha^2\mathcal{F}\{u\}.$$

Résoudre cette équation différentielle simple par rapport à la variable du temps t. Appliquer les conditions initiales.

iii) En tenant compte du résultat :

$$\exp(-k\alpha^2 t) = \mathcal{F}\{\ \exp(\frac{-x^2}{4kt})[4\pi kt]^{-1/2}\ \}$$

et par application du théorème de la convolution, obtenir la solution $u(x,t))$ du problème $(P.0)$.

2

Résoudre l'équation intégrale :

$$\int_0^{+\infty} f(t)sin(\alpha t)dt = \left\{ \begin{array}{ccc} 1-\alpha & si & 0 \le \alpha \le 1 \\ 0 & si & \alpha > 1 \end{array} \right\}$$

3

i) Refaire le calcul (v.cours) de la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

En déduire la transformée de Laplace de 1.

Avec un argument analogue montrer que :

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

ii) Calculer les transformées de Laplace des fonctions :

$$f_1(t) = \sin^2 t;$$
$$f_2(t) = \sin 3t - 2\cos 3t$$

iii) Evaluer les transformées de Laplace inverses suivantes :

a)
$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(p^2+1)^2}\}$$

b)
$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{p}{(p+1)^3(p-1)^2}\}$$

c)
$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(p^2+9)^2}\}$$

4

En supposant que :

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0$$

et que les nombres réels $\omega > 0, k > 0$ sont donnés, résoudre le système différentiel suivant par application de la transformée de Laplace :

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y - kx$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega x - ky$$

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
MATHEMATIQUES POUR L' INGENIEUR
le 7 décembre 2009
ANALYSE (I) T.D.3
(Transformée de Fourier et de Laplace - Distributions)

1

i) Montrer la propriété de la "transformée de Laplace des puissances"

ii) En supposant que :

$$x(0) = 10, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0,$$

et par application de la transformée de Laplace, résoudre l'équation différentielle suivante qui décrit le mouvement d'une particule soumise à deux forces extérieures, (une force d'attraction de la part de l'origine et une force de frottement) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0$$

Commenter votre résultat.

2

i) On étudie le problème de l'évolution dynamique d'un système physique dont l'état (en fonction du temps) est décrit par la fonction f, qui vérifie l'équation integrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-i\alpha t) dt = 2\pi \exp(-|\alpha|)$$

Résoudre ce problème en utilisant le théorème de la transformée de Fourier inverse.

ii)

a) Montrer les formules des tranformées de Laplace suivantes : (théorème du retard pour les fonctions cosinus et sinus)

$$\mathcal{L}[\exp(-at)\cos\omega t] = \frac{(p+a)}{(p+a)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\exp(-at)\sin\omega t] = \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$$

b) En tenant compte du résultat précédent résoudre l'équation différentielle suivante vérifiée par la charge électrique $Q(t)$ d'un condensateur :

$$\frac{d^2Q(t)}{dt^2} - Q(t) = \exp(-t)(2\sin t - \cos t), \text{ avec :} \{\frac{dQ}{dt}_{|t=0} = -1; \quad Q(t=0) = 1\}$$

3

i) Montrer l'expression de la distribution δ-de Dirac en coordonnées sphériques :
$x' = r' \sin\theta' \cos\phi'$; $y' = r' \sin\theta' \sin\phi'$; $z' = r' \cos\theta'$

$$\delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') = \frac{\delta(r - r')\delta(\theta - \theta')\delta(\phi - \phi')}{r^2 \sin\theta}$$

ii) Montrer que la transformée de Fourier de la distribution δ-de Dirac (à N-dimensions avec $N \geq 1$) vérifie :

$$(\tilde{\delta}_k) \equiv \mathcal{F}[\delta] = 1$$

iii) Soit la fonction Heaviside (échelon unité) : $Y = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{array} \right.$

Montrer l'expression de ses dérivées successives en termes de la distribution δ-de Dirac et ses dérivées :

$$\boxed{Y' = \delta} \quad \text{et} \qquad Y'' = \delta'(\phi) \ldots \; Y^{m+1} = \delta^{(m)}(\phi)$$

4

Potentiel Newtonien ou Potentiel Coulombien

En utilisant les propriétés de la distribution δ- de Dirac résoudre l'équation de Poisson qui correspond à un potentiel Coulombien ou un potentiel Newtonien :

$$\text{(P. O)} \qquad \Delta\Psi(\vec{r}) = -4\pi \, \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(où $\rho(\vec{r})$ est est une fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ intégrable d'après Lebesgue, et correspond physiquement à la densité de distribution de la charge, (ou de la masse) dans l'espace à trois dimensions.

5

On étudie le problème de l'évolution dynamique d'un système physique dont l'état est décrit par la fonction f (fonction du temps), qui vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + f(t) = \cos t$$

en supposant que :

$$\frac{df}{dt}_{|t=0} = -1; \qquad f(t = 0) = 0$$

Par application de la transformée de Laplace trouver la solution f de l'équation différentielle.

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
MATHEMATIQUES POUR L' INGENIEUR
le 14 décembre 2009
ANALYSE (I) T.D.4
(Fonctions Analytiques)

1

i) On considère la fonction d'une variable complexe $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

avec $f(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$. Montrer que en coordonnées polaires, les conditions de Cauchy-Riemann s'écrivent comme il suit :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \theta}; \qquad \frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}$$

Application : Trouver les fonctions holomorphes de la variable complexe $z = x + iy \in \mathbb{C}$, dont la partie réelle ne dépend que de $r = |z|$.

ii) Vérifier si les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{C}$, sont holomorphes (analytiques). Si oui, déterminer le domaine d'holomorphie (domaine d'analyticité) correspondant.

$$a) \quad f_1(z) = z^2 \; ; \qquad b) \quad f_2(z) = z^*$$

2

Evaluer l'integrale suivante :

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\exp(z)dz}{(z-1)(z+3)^2}$$

où $\mathcal{C}$ est une courbe fermée donnée par :

$$a) \quad |z| = \frac{3}{2}; \qquad b)|z| = 10$$

3

i)

Donner une démonstration du th.13.1 du cours :
Développement en **série de Taylor** uniformément convergente d'une fonction holomorphe à l'intérieur de son domaine d'analyticité.

ii) Vérifier si les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{C}$, sont holomorphes (analytiques). Si oui, déterminer le domaine d'holomorphie (domaine d'analyticité) correspondant.

$$a) \quad f_1(z) = \frac{1}{z} \; ; \qquad b) \quad f_2(z) = x + 2iy$$

iii)

Evaluer l'integrale suivante :

$$I = \oint_{\mathcal{C}} \frac{5z^2 - 3z + 2}{(z-1)^3}$$

où $\mathcal{C}$ est une courbe fermée entourant le point $z = 1$

E.I.S.T.I. - Département Mathématiques
1re Année Ingénieurs
MATHEMATIQUES POUR L' INGENIEUR
le 4 janvier 2010
ANALYSE (I) T.D.5
(Fonctions Analytiques- Fourier- Laplace)

1

Evaluer les integrales suivantes, en utilisant 2 méthodes différentes :

1)

$$I = \oint_{\mathcal{C}} \frac{5z^2 - 3z + 2}{(z-1)^3}$$

où $\mathcal{C}$ est une courbe fermée entourant le point $z = 1$

ii)

$$I = \oint_{\mathcal{C}} \frac{(z^2 + 4z + 2)exp(z)}{(z+2)^3}$$

où $\mathcal{C}$ est un cercle de rayon $|z| = 4$.

2

a) Evaluer la transformée de Laplace inverse suivante (utilisation de la définition de la transformée de *Laplace inverse* et des propriétés des fonctions analytiques (*contour de Bromwitch*) :

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(p^2+9)^2}\}$$

b) Evaluer la transformée de Fourier en cosinus $\mathcal{F}[f(x)](\alpha)$, de la fonction suivante en utilisant les propriétés des fonctions analytiques *contour de Jordan* :

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3}$$

3

On étudie le problème de l'évolution dynamique d'un système physique dont l'état est décrit par la fonction f (fonction du temps), qui vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} + 2\frac{df(t)}{dt} + 5f(t) = \exp(-t)\sin t, \quad \text{avec :} \quad \frac{df}{dt}_{|t=0} = 1, \; f(t=0) = 0$$

Résoudre ce problème en deux étapes :

a) Par application de la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation précédente montrer que :

$$L(p) = \frac{1}{p^2+2p+5} + \frac{1}{(p^2+2p+2)(p^2+2p+5)}$$

$$\text{(Rappel à utiliser :} \quad \mathcal{L}[\exp(-at)\sin\omega t] = \frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$$

b) Par application de la transformée de *Laplace inverse* et des propriétés des fonctions analytiques (*contour de Bromwitch*) trouver la solution f de l'équation différentielle.