

**EXAMEN D'ANALYSE NUMÉRIQUE I**

15 mai 2009 – DURÉE 3h00

*La consultation et l'échange des documents, et l'utilisation des calculatrices et des téléphones portables sont interdits.*

*La consultation de 3 feuilles manuscrites recto-verso, format A4 est autorisée*

- Ne pas détacher les feuilles.
  - Utiliser l'espace blanc pour vos réponses et le verso pour brouillon.
  - Pensez à indiquer votre nom sur chaque feuille
- 
- 

**Exercice 1.-** On cherche à résoudre un système linéaire de  $n$  équations à  $n$  inconnues s'écrivant :

$$A^2x = b, \text{ où } A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ et } b \in \mathbb{R}^n$$

1. Une première méthode consiste à

- calculer la matrice  $C = A^2$ ;
- factoriser  $C = LU$ ;
- résoudre les deux systèmes  $Ly = b$  et  $Ux = y$  pour obtenir  $x$ .

Précisez le nombre d'opérations utilisées par cette méthode.

SOL. multiplication de deux matrices :  $n^3$  + décomposition LU :  $\frac{2}{3}n^3$

C'est donc la multiplication des deux matrices qui prend le plus de temps.

Temps nécessaire pour la solution (estimation) : 10'

2. Proposez une autre méthode utilisant moins de multiplications.

SOL. Méthode améliorée

- factoriser  $A = LU$ . Le problème à résoudre devient  $LULUx = b$
- résoudre les systèmes  $Lv = b$ ,  $Uz = v$ ,  $Ly = z$  et  $Ux = y$  pour obtenir  $x$ .

Cette méthode permet d'économiser le produit de deux matrices et donc de réduire le nombre de multiplications.

Temps nécessaire pour la solution (estimation) : 20'

3. Dans le cas où la matrice  $\mathbf{A}$  est symétrique quelles sont les simplifications qui interviennent dans la résolution effectuée avec cette dernière méthode ?.

*SOL.* Si  $\mathbf{A}$  est symétrique, la décomposition LU peut être mise sous la forme  $LDL^T$ . La résolution de  $\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{b}$  équivaut à  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , elle devient donc celle de  $LDL^T L^T DL\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , soit  $LD \left(\mathbf{L}^T\right)^2 DL\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Au lieu de résoudre 4 systèmes triangulaires, on n'en résout plus que trois puisque  $\left(\mathbf{L}^T\right)^2$  est une matrice triangulaire supérieure. Les résolutions des systèmes diagonaux n'occasionnent chacune que  $n$  divisions.

*Temps nécessaire pour la solution (estimation) : 20'*

**Exercice 2.-** Soit la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

1. Calculer sa décomposition en valeurs singulières.

*SOL.*  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$ . Valeurs propres de  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$  :  $\lambda_1 = 16, \lambda_2 = 25$ .  
Valeurs singulières de  $\mathbf{A}$  :  $\sigma_1 = 4, \sigma_2 = 5$ .

Matrice de vecteurs propres de  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$  :  $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 12 \\ 0 & 16 & 0 \\ 12 & 0 & 16 \end{bmatrix}$ . Valeurs propres de  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  :  $\lambda_1 = 16, \lambda_2 = 25, \lambda_3 = 0$ .

Matrice de vecteurs propres de  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  :  $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & 3/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \end{bmatrix}$ .

Décomposition en valeurs singulières de  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \\ 4/5 & 0 & -3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

*Temps nécessaire pour la solution (estimation) : 20'*

2. Pour chacun des espaces  $R(\mathbf{A}), N(\mathbf{A}), R(\mathbf{A}^T), N(\mathbf{A}^T)$  calculer sa dimension et établir sa base.

(a) *SOL.* On a  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ , donc  $m = 2, n = 3$ . On a aussi  $\text{rang } \mathbf{A} = 2$ .

- $\dim R(\mathbf{A}) = \text{rang } \mathbf{A} = 2$ . L'espace est engendré par les deux colonnes de  $\mathbf{U}$ .

- $\dim N(\mathbf{A}) = n - \text{rang } \mathbf{A} = 3 - 2 = 1$ . L'espace est engendré par la dernière colonne de  $\mathbf{V}$  :  $\begin{bmatrix} 4/5 \\ 0 \\ -3/5 \end{bmatrix}$ .
- $\dim R(\mathbf{A}^\top) = \text{rang } \mathbf{A} = 2$ . L'espace est engendré par les deux premières colonnes de  $\mathbf{V}$  :  $\begin{bmatrix} 0 & 3/5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 4/5 \end{bmatrix}$ .
- $\dim N(\mathbf{A}^\top) = m - \text{rang } \mathbf{A} = 2 - 2 = 0$ . L'espace est de dimension 0 et se limite au point  $\{\mathbf{0}\}$ .

Temps nécessaire pour la solution (estimation) : 15'

3. En utilisant la décomposition en valeurs singulières, calculer la pseudo-inverse de  $\mathbf{A}$ .

SOL. On a

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V} \mathbf{\Delta}^{-1} \mathbf{U}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 3/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3/25 \\ 1/4 & 0 \\ 0 & 4/25 \end{bmatrix}$$

Temps nécessaire pour la solution (estimation) : 10'

**Exercice 3.-** On souhaite concevoir un virage d'une voie de chemin de fer entre les points  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$ .

**Partie A**

On suppose que le virage est décrit par une courbe de la forme

$$y = f(x)$$

qui satisfait aux conditions :

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f'(1) = 0.3$$

On cherche à représenter la courbe à l'aide d'un polynôme dans l'intervalle  $[0, 1]$ .

1. Calculer le degré minimal de ce polynôme.

SOL. On a quatre conditions, donc le degré minimal du polynôme est égal à 3

Temps nécessaire pour la solution (estimation) : 5'

2. Calculer ce polynôme.

SOL.  $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ . On a  $p(0) \equiv a_0 = 0 \implies p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$ .

$p'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$ . On a  $p'(0) \equiv a_1 = 0 \implies p(x) = a_3x^3 + a_2x^2$ .

$p(1) \equiv a_3 + a_2 = 1$ ,  $p'(1) \equiv 3a_3 + 2a_2 = 0.3 \implies a_2 = 2.7, a_3 = -1.7 \implies p(x) = -1.7x^3 + 2.7x^2$ .

Temps nécessaire pour la solution (estimation) : 10'

**Partie B**

On suppose maintenant que le virage est défini par des points donnés sur le parcours, c'est à dire que la courbe de la forme

$$y = g(x)$$

satisfait aux conditions :

$$g(0) = 0, \quad g(1/4) = 0, \quad g(3/4) = 1, \quad g(1) = 1$$

1. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange satisfaisant ces conditions. On ne demande pas de développer les calculs.

*SOL.* Le polynôme d'interpolation de Lagrange est donné par

$$p(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x)g(x_k)$$

où  $x_k$  désigne les points d'interpolation : 0, 1/4, 3/4 et 1, et  $L_k(x)$  est obtenu par :

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

avec ici  $n = 3$ , puisque le nombre de points vaut 4.

On n'a pas besoin de calculer  $L_0(x)$  ni  $L_1(x)$  mais uniquement  $L_2(x)$  et  $L_3(x)$  :

$$L_2(x) = \frac{(x)(x - 1/4)(x - 1)}{3/4(1/2)(-1/4)} = -\frac{32}{3}x^3 + \frac{40}{3}x^2 - \frac{8}{3}x$$

$$L_3(x) = \frac{(x)(x - 1/4)(x - 3/4)}{3/4(1/4)} = \frac{16}{3}x^3 - \frac{16}{3}x^2 + x$$

soit

$$p(x) = -\frac{32}{3}x^3 + \frac{40}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{3}x^3 - \frac{16}{3}x^2 + x = -\frac{16}{3}x^3 + 8x^2 - \frac{5}{3}x$$

2. Les deux courbes obtenues sont représentées sur la figure ci-dessous :  
insérer le dessin

- (a) Laquelle des deux courbes représente l'interpolé de Lagrange ?

*SOL.* C'est la courbe 1 puisque l'autre ne passe pas par les points d'interpolation.

- (b) Quel est à votre avis l'intérêt de la méthode envisagée dans la partie A par rapport à l'interpolation de Lagrange, pour la construction d'un virage ferroviaire ?

*SOL.* Ce n'est pas la réduction de la longueur du trajet mais la possibilité de maîtriser la courbure des extrémités du virage.

**Exercice 4.-** Calculer la valeur de l'intégrale

$$I(x) = \int_0^2 x dx$$

soit par la méthode de la quadrature de Gauss, en utilisant les polynômes orthogonaux de Legendre avec  $n = 2$  soit 3 points, soit par une intégration numérique basée sur une interpolation de Lagrange à 3 points équidistants.

*Données :* Pour les polynômes orthogonaux de Legendre on a pour  $n = 2$  les valeurs

$$w_0 = w_2 = 0.555, \quad w_1 = 0.889; \quad x_2 = -x_0 = 0.775, \quad x_1 = 0$$

*SOL.*

Solution avec quadrature de Gauss : Pour avoir comme intervalle d'intégration l'intervalle  $[-1, 1]$ , il faut faire le changement de variable suivant :

$$x = \frac{(2-0)z + (0+2)}{2} = z + 1 \implies z = x - 1$$

d'où  $dx = dz$ . On obtient donc

$$I(x) = \int_0^2 x dx = \int_{-1}^1 (z+1) dz \simeq w_0(z_0+1) + w_1(z_1+1) + w_2(z_2+1) = \dots = 1.999$$

Solution avec Lagrange 3 points équidistants :  $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ , le polynôme d'interpolation de Lagrange donne l'intégrale :

$$I = h \sum_{k=0}^n f(x_k) \alpha_n(k)$$

avec

$$\alpha_n(k) = \int_0^n \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^n \frac{x-l}{k-l} dx$$

soit ici  $h = 1$ , donc

$$I = \sum_{k=0}^n x_k \alpha_n(k) = \alpha_n(1) + 2\alpha_n(2)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_2(0) &= \int_0^2 \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^2 \frac{x-l}{k-l} dx = \int_0^2 \frac{x-1}{-1} \frac{x-2}{-2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (x^2 - 3x + 2) dx \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{8}{3} - \frac{12}{2} + 4 \right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2(1) &= \int_0^2 \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^2 \frac{x-l}{k-l} dx = \int_0^2 \frac{x-0}{1} \frac{x-2}{-1} dx = - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx \\ &= - \left( \frac{8}{3} - 4 \right) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_2(2) &= \int_0^2 \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^2 \frac{x-l}{k-l} dx = \int_0^2 \frac{x-0}{2} \frac{x-1}{1} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (x^2 - x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{8}{3} - 2 \right) = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Donc

$$I = \alpha_n(1) + 2\alpha_2(2) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

Il s'agit en fait de la formule des trapèzes !

On trouve une intégrale exacte puisqu'avec les polynômes de Lagrange on retrouve que l'interpolé est égal à la fonction à intégrer.

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2} \quad L_1(x) = \frac{x(x-2)}{-1} \quad L_2(x) = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$p(x) = -x(x-2) + x(x-1) = x(2-x+x-1) = x$$

Temps nécessaire pour la solution (estimation) : 15' voire un peu plus pour Lagrange

### Exercice 5.-

1. Soit l'équation différentielle

$$y'(x) = -y(x) + x + 1, \quad y(0) = 1$$

Pour sa résolution on applique la méthode de Runge d'ordre 4 avec pas  $h = 0.1$ .

Calculer la valeur de  $y(0.1)$ .

SOL. On calculera les coefficients  $k_i, i = 1, \dots, 4$ .

$$k_1 = 0.1 \times f(x_0, y_0) = 0.1 \times f(0, 1) = 0.1 \times (-1 + 0 + 1) = 0$$

$$k_2 = 0.1 \times f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1\right) = 0.1 \times f(0.05, 1) = 0.1 \times (-1 + 0.05 + 1) = 0.005$$

$$k_3 = 0.1 \times f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2\right) = 0.1 \times f(0.05, 1.0025) = 0.1 \times (-1.0025 + 0.05 + 1) = 0.00475$$

$$k_4 = 0.1 \times f(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.1 \times (-1.00475 + 0.1 + 1) = 0.009525$$

d'où

$$y(0.1) = y_1 = 1 + \frac{1}{6} \times (0 + 2 \times 0.005 + 2 \times 0.00475 + 0.009525) = 1.0048375$$

Temps nécessaire pour la solution (estimation) : 20'

2. Soit le système différentiel

$$\begin{cases} y'(x) = -z(x) + x + 1, \\ z'(x) = -2y(x), \end{cases}$$

$$y(0) = 1, z(0) = 0$$

Expliciter la méthode de résolution à l'aide de la méthode de Runge sans effectuer les calculs numériques.

*SOL.* On introduit le vecteur des fonctions inconnues :

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix}$$

pour transformer le système en :

$$Y'(x) = AY(x) + B(x)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, B(x) = \begin{pmatrix} x+1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les quantités  $k_1, k_2, k_3, k_4$  deviennent :

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_n, Y_n) = AY_n + B(x_n) \\ K_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{h}{2}K_1\right) = A\left(Y_n + \frac{h}{2}K_1\right) + B\left(x_n + \frac{h}{2}\right) \\ K_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{h}{2}K_2\right) = A\left(Y_n + \frac{h}{2}K_2\right) + B\left(x_n + \frac{h}{2}\right) \\ K_4 &= f(x_n + h, Y_n + hK_3) = A\left(Y_n + \frac{h}{2}K_3\right) + B(x_n + h) \end{aligned}$$

puis

$$Y_{n+1} = Y_n + h\left(\frac{1}{6}K_1 + \frac{1}{3}K_2 + \frac{1}{3}K_3 + \frac{1}{6}K_4\right)$$

Avec

$$Y(0) = \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*Temps nécessaire pour la solution (estimation) : 20'*