EISTI - DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES

CORRECTION DE L'EXAMEN D'ANALYSE NUMÉRIQUE II

1ère Session

11 juin 2008 – **DURÉE 3h00**

Exercice 1.- Racines des polynômes

Soit $p(x)$ un polynôme de degré n avec $x \in [a,b]$. Une racine $\xi \in [a,b]$ du polynôme est une valeur telle que

$$p(\xi) = 0$$

On peut écrire cette relation sous la forme

$$\xi = f(\xi)$$

Le point $\xi \in [a,b]$ est alors un point fixe de la fonction f (c'est-à-dire à ce point l'entrée à f est égale à la sortie de f).

Pour calculer la racine ξ du polynôme, nous pouvons envisager l'algorithme suivant :

Étape 0 Choisir au hasard un nombre $x_0 \in [a,b]$.

Étape $n > 0$ Procédure itérative $x_n = f(x_{n-1})$.

1. Exprimer l'erreur ε_n de l'approximation de la racine ξ à l'étape n en fonction de ξ et de x_n.

   SOL.- $\varepsilon_n = x_n - \xi$

2. Évaluer la condition que doit remplir $f'(\xi)$ pour que $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

   SOL.- $\varepsilon_n = x_n - \xi = f(x_{n-1}) - \xi = f(\xi + \varepsilon_{n-1}) - \xi = f(\xi) + \varepsilon_{n-1} f'(\xi) + \cdots - \xi = \varepsilon_{n-1} f'(\xi) + \cdots \implies | f'(\xi) | < 1$.

3. Donner une expression possible du choix de f. On exprimera $f(x)$ en fonction de $p(x)$ et de x.

   SOL.- Puisque $f(\xi) = p(\xi) + \xi = 0 + \xi$, on aura $f(x) = p(x) + x$

4. Donner les conditions que doit remplir $p'(\xi)$ pour que l'algorithme ci-dessus converge.

   SOL.- On dérive par rapport à ξ et on obtient $f'(\xi) = p'(\xi) + 1 \Longrightarrow p'(\xi) = f'(\xi) - 1 \Longrightarrow \mid p'(\xi) \mid = \mid f'(\xi) - 1 \mid < 1 \Longrightarrow 0 < p'(\xi) < 2$.

Exercice 2.- Méthodes directes pour les systèmes linéaires
Soit le système linéaire

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ r_2 & p_2 & q_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & r_3 & p_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_n & p_n \end{bmatrix}$$

1. Montrer que les matrices $\mathbf{L}, \mathbf{U}$ de la décomposition $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ sont de la forme

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \ell_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ell_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ell_n & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & v_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_n \end{bmatrix}$$

   Indication.- Utiliser la méthode du pivot de Gauss.

   SOL.- En utilisant le pivot de Gauss, on voit qu'il suffit de faire une opération élémentaire par ligne. Donc il y a un seul facteur multiplicateur ℓ_i pour la ligne i et par conséquent $\mathbf{L}$ est de la forme donnée. La forme de $\mathbf{U}$ découle immédiatement.

2. Donner les expressions de ℓ_i, u_i et v_i.

   SOL.- En utilisant la relation $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ on obtient

$$\begin{aligned} p_1 &= u_1 \\ r_i &= \ell_i u_{i-1};\ i \geq 2 \\ p_i &= u_i + \ell_i v_{i-1};\ i \geq 2 \\ q_i &= v_i;\ i \geq 1 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
u_1 &= p_1 \\
u_i &= p_i - \ell_i q_{i-1};\ i \geq 2 \\
\ell_i &= \frac{r_i}{u_{i-1}};\ i \geq 2 \\
v_i &= q_1;\ i \geq 1
\end{aligned}$$

3. Si on pose $\mathbf{b} = [b_1, \ldots, b_n]^\top$, donner la solution du système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ à l'aide de $\mathbf{L}, \mathbf{U}$.

   SOL.- Il faut résoudre les deux systèmes $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ et $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$.

$$\begin{array}{lcl}
\mathbf{Ly} = \mathbf{b} & \Longrightarrow & y_1 = b_1;\ y_i = b_i - \ell_i y_{i-1};\ i \geq 2 \\
\mathbf{Ux} = \mathbf{y} & \Longrightarrow & x_n = \frac{y_n}{u_n};\ x_i = \frac{y_i - q_i x_{i+1}}{u_i};\ i = n-1, \ldots, 1
\end{array}$$

Exercice 3.- Méthodes itératives pour les systèmes linéaires

Soit le système linéaire

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p & 2 & 0 \\ 2 & p & 1 \\ 0 & 1 & p \end{bmatrix};\ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix};\ p \in \mathbb{Z}$$

1. Pour quelles valeurs de p peut-on assurer que les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel convergent ?

   SOL.-La condition A à diagonale dominante étant une condition suffisante mais pas nécessaire, il suffit que $p > 2 + 1 \implies p \geq 4$. Le fait que $p \leq 2 + 1$ ne garantit pas la divergence.

2. On applique la méthode de Jacobi avec $\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0]^\top$. Faites une itération et évaluer $\mathbf{x}_1$.

   SOL.- On a $\mathbf{D} = \mathbf{diag}\,[p, p, p] = \mathbf{diag}\,[4, 4, 4]$. Donc $\mathbf{x}_1 = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} = [1, 2, 2]^\top$.

3. Supposons qu'il existe une constante C, avec $0 < C < 1$, telle que

$$\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}\| \leq C\,\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|$$

où $\mathbf{x}$ est la vraie solution. Montrer qu'alors l'erreur $\varepsilon_n = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|$ vérifie

$$\varepsilon_n \leq \frac{C^n}{1-C} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|$$

SOL.- $\varepsilon_n = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \leq C\ \|\mathbf{x}_{n-1} - \mathbf{x}\| \leq \cdots \leq C^n\ \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}\|$. D'autre part $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\| + \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\| + C\,\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}\|$ donc $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}\| \leq \frac{1}{1-C}\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|$. D'où $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \leq C^n\,\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}\| \leq \frac{C^n}{1-C}\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|$.

4. Évaluer la valeur de C afin d'avoir

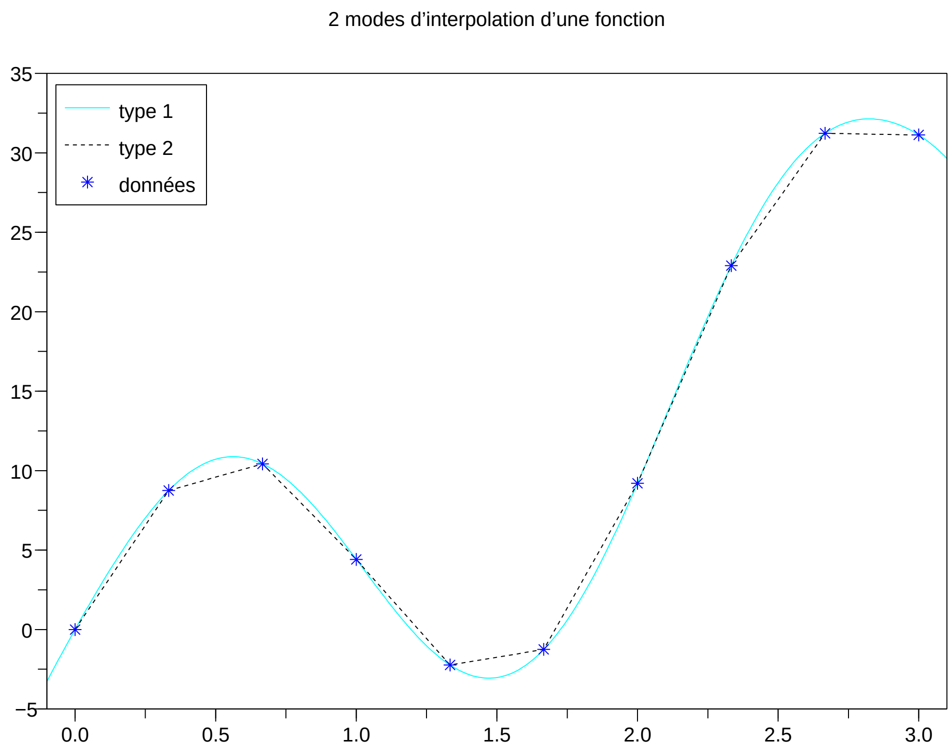
$$\varepsilon_{10} \leq 10^{-8}$$

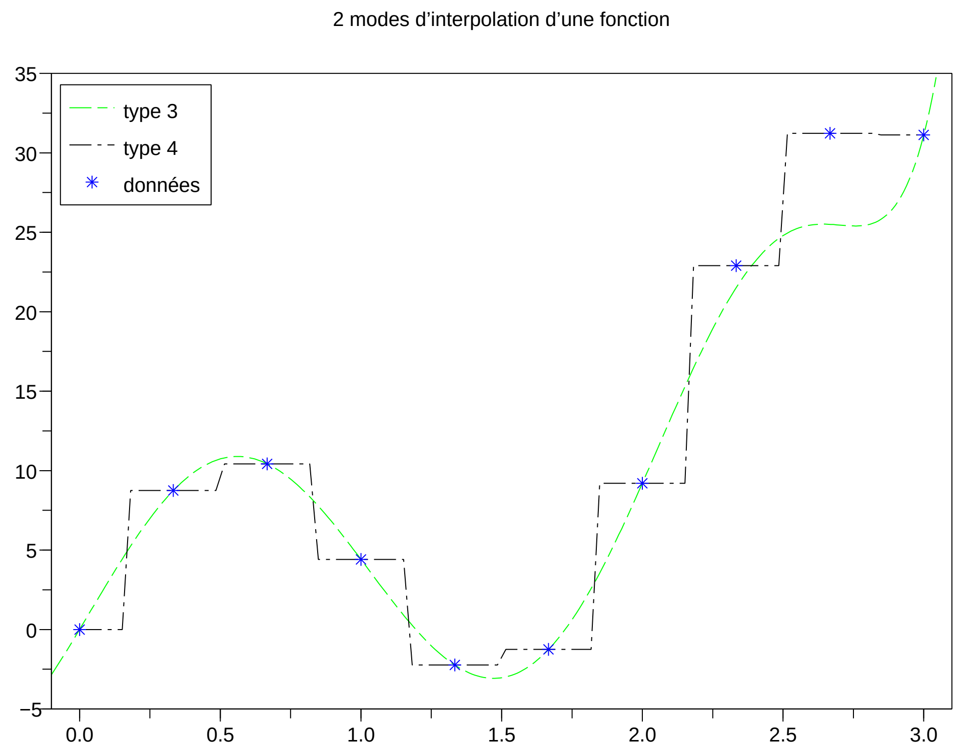
SOL.- $\frac{C^{10}}{1-C}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \leq 10^{-8} \Longrightarrow \frac{C^{10}}{1-C}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| = \frac{C^{10}}{1-C} \cdot \mathbf{3} \leq 10^{-8} \Longrightarrow$ $C^{10} \leq 0.333\ldots \times 10^{-8} - 0.333\ldots \times 10^{-8} \times C \leq 0.333\ldots \times 10^{-8} \Longrightarrow$ $C \leq (0.333\ldots \times 10^{-8})^{0.1}$

Exercice 4.- Interpolation

On réalise l'interpolation d'une fonction en dix points régulièrement espacés de l'intervalle $[a,b] = [0,3]$.

Partie A - On obtient par différentes méthodes les graphiques suivants :


2 modes d'interpolation d'une fonction
type 1
type 2
données
35
30
25
20
15
10
5
0
−5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0



1. Parmi les quatre types d'interpolation réalisés dans les graphiques ci-dessus, lequel correspond à l'interpolation linéaire par intervalle ? (On justifiera la réponse)

   SOL.- La fonction 2 puisqu'on constate que la fonction d'interpolation est bien linéaire entre les points de données et qu'elle a une expression unique entre deux points.

2. Parmi les quatre types d'interpolation réalisés dans les graphiques ci-dessus, lequel correspond à l'interpolation de Lagrange ? (On justifiera la réponse)

   SOL.- La fonction 1 : La 2 est linéaire, la 4 est n'importe quoi mais pas polynomiale, la 3 ne passe pas par les derniers points de données donc n'est pas une fonction d'interpolation.

Partie B -

Soit $a = x_1 < x_2 < ... < x_{n+1} = b$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$. On se donne $n + 1$ réels y_i.

1. Pour $i = 1, ...n + 1$, on définit

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j = 1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

   Montrer que $\{l_1, l_2, ...l_{n+1}\}$ est une base de $\mathbb{R}^n[X]$.

   SOL.-Le système $\{l_1, l_2, ...l_{n+1}\}$ contient $n + 1$ éléments dans l'espace des polynômes $\mathbb{R}^n[X]$ qui est de dimension $n + 1$. Pour montrer que ce système forme une base, il suffit de montrer qu'il est libre. Soit $n + 1$ constantes λ_i, $i = 1, ...n + 1$ vérifiant

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i l_i = 0$$

   En prenant la valeur de ce polynôme au point x_k pour tout $k = 1, ...n+1$ il vient

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i l_i (x_k) = \lambda_k l_k (x_k) = \lambda_k = 0$$

2. Montrer qu'il existe un unique polynôme p de degré inférieur ou égal à n tel que $p(x_j) = y_j$ pour $j = 1, ...n + 1$.

   SOL.-Il découle de ce qui précède que

$$y_i = \sum_{k=1}^{n+1} y_k l_k (x_i)$$

   donc le polynôme p défini par

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n+1} y_k l_k (x)$$

   est de degré n et réalise l'interpolation. L'unicité est obtenue du fait que l'on a une base.

3. On note p_k le polynôme d'interpolation des $k+1$ premières données, i.e. (x_j, y_j), pour $j = 1, ...k+1$.

   (a) Montrer que

   $$p_k(x) - p_{k-1}(x) = [y_1, ...y_{k+1}](x - x_1)(x - x_2)...(x - x_k)$$

   où $[y_1, ...y_{k+1}]$ est le coefficient de x^k dans $p_k(x)$
   SOL.-$p_k - p_{k-1}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à k qui s'annule en chacun des x_i pour $i = 1, ...k$. On a donc

   $$p_k(x) - p_{k-1}(x) = a_k \prod_{i=1}^{k} (x - x_i)$$

   Le coefficient a_k est celui de x^k. Or p_{k-1} est de degré strictement inférieur à k. Donc a_k ne peut être que le coefficient de x^k dans p_k.

   On admet qu'en définissant $[y_j] = y_j$, $j = 1, ...n+1$, on a $\forall k \geq 1$

   $$[y_1, ...y_{k+1}] = \frac{[y_2, ...y_{k+1}] - [y_1, ...y_k]}{x_{k+1} - x_1}$$

   (b) Déduire du a) que

   $$p_n(x) = [y_1] + \sum_{k=1}^{n} [y_1, ...y_{k+1}](x - x_1)(x - x_2)...(x - x_k)$$

   SOL.-Se démontre par récurrence.

   (c) Exemple. On considère les points $x_j = -3 + j$ pour $j = 1, ...5$, et les ordonnées $y_j = (-1)^j$.

Dresser le tableau des différences divisées suivant :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & \longrightarrow & y_1 & & & & & & & & \\
 & & & \searrow & & & & & & & \\
 & & & & [y_1,y_2] & & & & & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & & & & & \\
x_2 & \longrightarrow & y_2 & & & & [y_1,y_2,y_3] & & & & \\
 & & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & & \\
 & & & & [y_2,y_3] & & & & [y_1,y_2,y_3,y_4] & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
x_3 & \longrightarrow & y_3 & & & & [y_2,y_3,y_4] & & & & [y_1,y_2,y_3,y_4,y_5] \\
 & & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & & [y_3,y_4] & & & & [y_2,y_3,y_4,y_5] & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & & \\
x_4 & \longrightarrow & y_4 & & & & [y_3,y_4,y_5] & & & & \\
 & & & \searrow & & \nearrow & & & & & \\
 & & & & [y_4,y_5] & & & & & & \\
 & & & \nearrow & & & & & & & \\
x_5 & \longrightarrow & y_5 & & & & & & & &
\end{array}
$$

Construire le polynome d'interpolation correspondant.

SOL.-

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
-2 & \longrightarrow & -1 & & & & & & & & \\
 & & & \searrow & & & & & & & \\
 & & & & 2 & & & & & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & & & & & \\
-1 & \longrightarrow & 1 & & & & -2 & & & & \\
 & & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & & \\
 & & & & -2 & & & & 4/3 & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
0 & \longrightarrow & -1 & & & & 2 & & & & -2/3 \\
 & & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & & 2 & & & & -4/3 & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & & \\
1 & \longrightarrow & 1 & & & & -2 & & & & \\
 & & & \searrow & & \nearrow & & & & & \\
 & & & & -2 & & & & & & \\
 & & & \nearrow & & & & & & & \\
2 & \longrightarrow & -1 & & & & & & & &
\end{array}
$$

Le polynôme dans la base de Newton donne :

$p(x) = -1+2(x+2)-2(x+2)(x+1)+4/3(x+2)(x+1)x-2/3(x+2)(x+1)x(x-1)$

4. Expliquer en quoi la méthode exposée au paragraphe 3 est plus intéressante que celle de Lagrange pour obtenir le polynôme d'interpolation.

SOL.- Mise à jour plus facile lors de l'ajout d'un point, Stockage limité du nombre de valeurs nécessaires.

Exercice 5.- Équations différentielles ordinaires
Soit l'équation différentielle

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y);\ x \in [x_0, x_T] \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

On note par $y(x)$ la solution analytique (exacte) et par $y(x;h)$ la solution numérique obtenue avec une méthode de résolution numérique qui utilise comme pas de discretisation la valeur h.

Supposons que la méthode de résolution utilisée soit d'ordre p. Dans ce cas admettons que la solution numérique peut être approchée par l'expansion asymptotique selon les puissance de h suivant la formule

$$y(x;h) = y(x) + q_p(x)\,h^p + q_{p+1}(x)\,h^{p+1} + \cdots$$

où $q_k(x)\,; k \geq p$ fonctions indépendantes de h.

Posons

$$\varepsilon_p(x;h) = y(x;h) - y(x)$$

l'erreur de la solution numérique au point x.

1. Évaluer la valeur de $\varepsilon_p(x;h/2)$.
   SOL.- $\varepsilon_p(x;h) = y(x;h) - y(x) = q_p(x)\,h^p + q_{p+1}(x)\,h^{p+1} + \cdots,$
   $\varepsilon_p(x;h/2) = y(x;h/2) - y(x) = q_p(x)\left(\frac{h}{2}\right)^p + q_{p+1}(x)\left(\frac{h}{2}\right)^{p+1} + \cdots.$
   Soustraction de la 2e de la 1e : $\varepsilon_p(x;h) - \varepsilon_p(x;h/2) = y(x;h) - y(x;h/2)$
   $= y(x)+q_p(x)\,h^p+q_{p+1}(x)\,h^{p+1}+\cdots-\Big(y(x) + q_p(x)\left(\frac{h}{2}\right)^p + q_{p+1}(x)\left(\frac{h}{2}\right)^{p+1} + \cdots\Big) =$
   $q_p(x)\left(\frac{h}{2}\right)^p\left(2^P - 1\right) + q_{p+1}(x)\left(\frac{h}{2}\right)^{p+1}(2^{p+1} - 1) + \cdots,$
   d'où $q_p(x)\left(\frac{h}{2}\right)^p \simeq \frac{y(x;h)-y(x;h/2)}{2^p-1}$ et donc $\varepsilon_p(x;h/2) = y(x;h/2) - y(x) \simeq \frac{y(x;h)-y(x;h/2)}{2^p-1}$.

2. Application. Soit l'équation différentielle

$$\begin{aligned} y' &= -xy^2(x)\,;\; x \in [0,5] \\ y(0) &= 2 \end{aligned}$$

dont la solution analytique est $y(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

Pour sa résolution nous avons utilisé deux méthodes numériques : Euler et Runge-Kutta d'ordre 2. Le tableau suivant présente les erreurs de la solution numérqiue pour $x = 5$, pour différentes valeurs du pas h :

h	Méthode A	Méthode B
1	3.052e-02	5.216e-03
0.5	1.461e-02	1.035e-03
0.25	7.161e-03	2.497e-04
0.125	3.548e-3	6.189e-05
0.0625	1.766e-03	1.544e-05

Identifier quelle colonne entre les deux a été obtenue en utilisant la méthode de Runge-Kutta. Justifier votre réponse.

SOL.- La colonne avec la méthode de Runge-Kutta est la deuxième. En effet d'après la question précédente l'erreur quand on passe du pas h au pas $h/2$ est divisée par $2^p - 1$, où p l'ordre de la méthode. Donc pour Euler on doit avoir une division par 1 et pour Runge-Kutta une division par 3. On constate que dans la première colonne que l'erreur, chaque fois qu'on divise par 2 le pas, est divisée par 2, et dans la deuxième colonne elle est divisée par 4. Si on suppose que les erreurs de calcul sont homogènes quand on diminue le pas h, on doit conclure que la 2e colonne provient d'une méthode numérique d'ordre 2.