EISTI - DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES

EXAMEN D'ANALYSE NUMÉRIQUE

juin 2007 – **DURÉE 3h00**
Correction de l'examen

N.B. : Des remarques liées aux erreurs les plus fréquemment constatées, ou proposant une alternative de démonstration ou de réponse sont insérées dans la correction après les items "RMQ". Elles peuvent vous aider à mieux comprendre cette correction.

Exercice 1 :

On considère l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$\left\{ \begin{array}{c} y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0, \quad t > 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = z_0 \end{array} \right. \tag{1}$$

On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1(t) = y(t) \\ w_2(t) = y'(t) \end{array} \right.$$

puis le vecteur

$$\mathbf{w}(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix}$$

Partie A

1. Vérifier que l'équation (1) peut être écrite comme un système (2×2) d'équations différentielles du premier ordre de la forme
$$\mathbf{w}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{w}(t) \tag{2}$$
où $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de taille 2, et $\mathbf{w}'(t) = \begin{pmatrix} w_1'(t) \\ w_2'(t) \end{pmatrix}$.

   SOL : Du fait que $\left\{ \begin{array}{l} w_1(t) = y(t) \\ w_2(t) = y'(t) \end{array} \right.$ on a $y''(t)+5y'(t)+6y(t) = w_2'(t)+5w_2(t)+6w_1(t) = 0$ soit $w_2'(t) = -5w_2(t) - 6w_1(t)$. De plus $w_1'(t) = y'(t) = w_2(t)$. On déduit donc que $\begin{pmatrix} w_1'(t) \\ w_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix}$.

2. En utilisant le polynôme caractéristique $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$déterminer les valeurs propres de $\mathbf{A}$.

   SOL : $\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -6 & -5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 3)(\lambda + 2)$. Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = -2$.

3. La matrice est-elle diagonalisable ? (Justifiez votre réponse).

   SOL : La matrice est diagonalisable puiqu'elle a deux valeurs propres distinctes et qu'elle est de dimension 2.

   RMQ : Ne pas confondre diagonalisable avec inversible, i.e. de déterminant non nul.

4. Calculer les vecteurs propres $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ de la matrice $\mathbf{A}$ en utilisant les valeurs propres déjà calculées et le fait que $\|\mathbf{v}_i\|_2 = 1, i = 1, 2$.

   SOL : On a $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ d'où $2v_{11} = -v_{12}$ et $\sqrt{v_{11}^2 + v_{12}^2} = 1$, donc $v_{11} = \sqrt{0.2} = \sqrt{\frac{2}{10}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = 0.447$ et $v_{12} = 2\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{0.2} = 0.894$. De même on obtient $v_{21} = \sqrt{0.1} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} = 0.316$ et $v_{22} = 3\sqrt{0.1} = 3\sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} = 0.948$.

   RMQ : Ne pas oublier de normaliser les vecteurs propres avec la norme 2.

5. Si on note par $\mathbf{V} = (v_1, v_2)$ la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de A et par $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ la matrice diagonale formée des valeurs propres, donner la formule qui exprime $\mathbf{A}$ en fonction de $\mathbf{D}, \mathbf{V}$ et $\mathbf{V}^{-1}$.

   SOL : $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}$

6. En déduire l'expression pour $\mathbf{A}^{-1}$.

   SOL : $\mathbf{A}^{-1} = \left(\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}\right)^{-1} = \left(\mathbf{V}^{-1}\right)^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}^{-1}$

   RMQ : Ne pas oublier que l'opération d'inversion appliquée à un produit à pour effet d'inverser l'ordre des matrices en plus d'inverser chaque terme. On ne trouve donc pas $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}$ (ce que l'on peut facilement vérifier en calculant $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$.

7. Donner le noyau $N(\mathbf{A})$ et l'image $R(\mathbf{A})$ de $\mathbf{A}$ ainsi que leurs dimensions.

   SOL : La matrice est de rang $r = 2$ car son déterminant est non nul donc ses vecteurs colonnes sont indépendants. D'après le théorème du rang ($\dim N(\mathbf{A}) + \dim R(A) = \dim \mathbb{R}^2$) on a donc $\dim R(A) = 0$ donc $N(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\}$ et $R(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^2$.On a bien $\dim(N(\mathbf{A})) = n - r = 0$ et $\dim(R(\mathbf{A})) = r = 2$.

   RMQ : On pouvait aussi trouver le noyau par résolution du système découlant de sa définition : $N(A) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / A.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. On en déduit que $(x, y) = (0, 0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ ce qui entraîne bien que $\dim(N(\mathbf{A})) = 0$ et non pas 1 (puisqu'il ne s'agit pas d'une droite vectorielle). Le théorème du rang est alors la plus simple manière de conclure pour retrouver l'image, qui étant de dimension 2 et incluse dans $\mathbb{R}^2$ est forcément égale à $\mathbb{R}^2$.

8. Soit $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{W}^\top$ la décomposition de $\mathbf{A}$ en valeurs singulières. Évaluer la matrice $\mathbf{S}$.

   SOL : Nous avons $\mathbf{S} = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2)$ avec $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})}, i = 1, 2$ où $\lambda_i\left(\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\right)$ la i-ième valeur propre de $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$. On a $\mathbf{A}^\top\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 36 & 30 \\ 30 & 26 \end{pmatrix}$. Polynôme caractéristique $\det\begin{pmatrix} 36-\lambda & 30 \\ 30 & 26-\lambda \end{pmatrix} = 0$, d'où racines $\lambda_1 = \frac{62+\sqrt{3700}}{2} = 31 + \sqrt{925} = 61.41$ et $\lambda_2 = \frac{62-\sqrt{3700}}{2} = 31 - \sqrt{925} = 0.586$. Donc $\sigma_1 = \sqrt{31 + \sqrt{925}} = 7.83$ et $\sigma_2 = \sqrt{31 - \sqrt{925}} = 0.76$ et, par conséquent $\mathbf{S} = \operatorname{diag}(7.83, 0.76)$.

   RMQ : Les valeurs singulières sont bien les **racines** des valeurs propres de $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$, cette matrice n'est pas égale à $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top$ mais elle a les mêmes valeurs propres (en effet si $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top v = \lambda v$ alors en posant $\mathbf{w} = \mathbf{A}^\top v$ on a $\mathbf{A}\mathbf{w} = \lambda\left(\mathbf{A}^\top\right)^{-1}\mathbf{w}$ donc $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\mathbf{w} = \lambda w$, ce qui antraîne que λ est valeur propre de $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$) donc on peut aussi partir de $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top$.

9. Posons $\mathbf{A}^{+}= \mathbf{W}\mathbf{S}^{+}\mathbf{U}^{\top}$ avec $\mathbf{S}^{+} = \operatorname{diag}(1/\sigma_1, 1/\sigma_2)$. Quelle est la relation entre $\mathbf{A}^{+}$ et $\mathbf{A}^{-1}$? Justifier brièvement votre réponse.

   SOL : La matrice est de rang plein, elle est donc inversible. Donc la pseudoïnverse $\mathbf{A}^{+}$ est égale à l'inverse $\mathbf{A}^{-1}$.

   RMQ : On pouvait aussi le démontrer algébriquement : $\mathbf{A}^{-1}$ vérifie $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ or on a $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{W}\mathbf{S}^{+}\mathbf{U}^{\top}\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{W}^{\top}$. Du fait que $\mathbf{U}$ est unitaire, on tire $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{W}\mathbf{S}^{+}\mathbf{S}\mathbf{W}^{\top}$. Du fait que $\mathbf{S}^{+} = \operatorname{diag}(1/\sigma_1, 1/\sigma_2)$, on tire $\mathbf{S}^{+}\mathbf{S} = I$ donc $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{W}\mathbf{W}^{\top}$ et en utilisant le fait que W est untaire on peut conclure que $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, donc la pseudoïnverse $\mathbf{A}^{+}$ est bien égale à l'inverse $\mathbf{A}^{-1}$.

Partie B

Utilisation de la méthode d'Euler explicite.

Soit un système d'équations différentielles muni de conditions aux limites, c'est à dire un problème de Cauchy vectoriel, de la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{Y}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{Y}(t)) \\ \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0 \end{cases} \tag{3}$$

où $\mathbf{Y}$ désigne deux fonctions de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ de matrice $\mathbf{A}_F$ et $\mathbf{Y}_0$ la condition initialepour les deux fonctions.

On considère une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ de la forme $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$.

Le schéma d'**Euler explicite** appliqué à la résolution du problème (3) pour la subdivision donnée, se met sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + h\mathbf{A}_{\mathbf{F}}\mathbf{Y}_n \\ \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0 \end{cases} \tag{4}$$

où Y_n désigne l'approximation dans $\mathbb{R}^2$ de la quantité $\mathbf{Y}(t_n)$.

10. Ecrire le schéma d'Euler explicite pour résoudre le système (2).

    SOL : En appliquant la formule donnée ci-dessus en (4).on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{n+1} &= \mathbf{Y}_n + h\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}\mathbf{Y}_n \\ &= (\mathbf{I} + h\mathbf{A})\mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} 1 & h \\ -6h & 1-5h \end{pmatrix}\mathbf{Y}_n \end{aligned}$$

    et on conserve $\mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0$.

    RMQ : L'inconnue $\mathbf{Y}(t)$ est une fonction vectorielle, i.e. $\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, ce qui est cohérent avec le fait qu'elle est multipliée par une matrice. A chaque itération, on calcule un vecteur dont chaque composante et une fonction du temps. On obtient donc deux suites de fonctions $y_1^n(t)$ et $y_2^n(t)$. On demandait simplement d'appliquer la formule et de calculer la matrice d'itération $\begin{pmatrix} 1 & h \\ -6h & 1-5h \end{pmatrix}$

11. On considère la diagonalisation de la matrice $\mathbf{A}$ trouvée à la question 2, sous la forme $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}$, où $\mathbf{D}$ est la matrice diagonale des valeurs propres de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{V}$ la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres correspondants.
On introduit dans le schéma numérique de la question précédente la transformation $\mathbf{X}_n = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}_n$. Montrer que le schéma d'Euler se met sous la forme :

$$\mathbf{X}_{n+1} = (\mathbf{I} + h\mathbf{D})\,\mathbf{X}_n \tag{5}$$

SOL : A partir de $\mathbf{Y}_{n+1} = (\mathbf{I}+h\mathbf{A})\mathbf{Y}_n$, on a $\mathbf{V}\mathbf{X}_n = \mathbf{Y}_n$ donc $\mathbf{V}\mathbf{X}_{n+1} = (\mathbf{I}+h\mathbf{A})\mathbf{V}\mathbf{X}_n = (\mathbf{I}+h\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1})\mathbf{V}\mathbf{X}_n = \mathbf{V}\mathbf{X}_n + h\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{X}_n = \mathbf{V}\mathbf{X}_n + h\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{X}_n$. En multipliant à gauche par $\mathbf{V}^{-1}$on obtient $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n + h\mathbf{D}\mathbf{X}_n = (\mathbf{I} + h\mathbf{D})\,\mathbf{X}_n$.

RMQ : Ne pas oublier que seule la notation matrice*vecteur a un sens, la notation vecteur*matrice est incohérente.

12. Montrer que le système d'équations obtenu en (5) correspond à la résolution de deux équations différentielles de la forme

$$x'(t) = \alpha \cdot x(t)$$

que l'on explicitera.

SOL : Le système obtenu en (5) est diagonal, puisqu'il s'écrit

$$\mathbf{X}_{n+1} = \left(\mathbf{I} + h\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right)\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} 1-3h & 0 \\ 0 & 1-2h \end{pmatrix}\mathbf{X}_n$$

On peut donc écrire $\begin{pmatrix} x_1^{n+1} \\ x_2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3h & 0 \\ 0 & 1-2h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^n \\ x_2^n \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} x_1^{n+1} = (1-3h)x_1^n \\ x_2^{n+1} = (1-2h)x_2^n \end{cases}$.
Il s'agit donc de deux équations de la forme $x_{n+1} = (1-\alpha h)x_n = x_n - \alpha h x_n$ qui correspondent chacune à la résolution d'une équation différentielle de la forme $x'(t) = -\alpha x(t)$. Les deux équations en x à résoudre sont donc :

$$x_1'(t) = -3x_1(t) \text{ et } x_2'(t) = -2x_2(t)$$

RMQ : Le texte stipule "deux équations différentielles" ce qui signifie qu'il s'agit bien d'équations dont l'inconnue est une fonction scalaire et non vectorielle. De plus la typographie indique que x n'est pas écrit en gras, donc n'est pas vectoriel. La quantité α est donc un réel, et non pas une matrice.

De plus les coefficients des équations d'itérations dépendent de h, puisque c'est le paramètre de discrétisation. Par contre les équations à résoudre ne peuvent pas en dépendre, on ne peut donc pas avoir dans la même équation h et x_1^n ou x_2^n.

13. En remarquant que chaque terme de la suite $(\mathbf{X}_n)_n$ s'écrit $\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} X_n^1 \\ X_n^2 \end{pmatrix}$ où X_n^1 et X_n^2 sont les termes généraux de suites géométriques, déterminer la condition sur h assurant la convergence de la suite $(\mathbf{X}_n)_n$.
(On rappelle qu'une suite géométrique de raison $r \in \mathbb{R}$ converge si $|r| < 1$)

SOL : $\begin{cases} x_1^{n+1} = (1-3h)x_1^n \\ x_2^{n+1} = (1-2h)x_2^n \end{cases}$ donc pour avoir convergence il faut que $\begin{cases} |1-3h| < 1 \\ |1-2h| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} h < 2/3 \\ h < 1 \end{cases} \Leftrightarrow h < 2/3.$

RMQ : Les deux suites itératives ont chacune une raison réelle et dont la valeur absolue doit être inférieure à 1. Les deux conditions obtenues doivent être réunies pour que la suite (x_1^n, x_2^n) soit convergente. L'écriture $|r| < 1$ n'a de sens que si r est un réel, inutile d'essayer d'écrire $|H|$ où H est une matrice...

Partie C

Utilisation pour la résolution de (2) du schéma de Heun.

Pour la résolution du système d'équations différentiellese introduit en (3), le schéma de **Heun** se décompose en deux étapes :

- une étape de prédiction, pendant laquelle on calcule

$$\overline{\mathbf{Y}}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{A}_\mathbf{F}\mathbf{Y}_n \tag{6}$$

- une étape de correction, pendant laquelle on calcule

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \frac{h}{2}\left[\mathbf{A}_\mathbf{F}\mathbf{Y}_n + \mathbf{A}_\mathbf{F}\overline{\mathbf{Y}}_{n+1}\right] \tag{7}$$

14. Écrire le schéma de Heun pour résoudre le système (2).

SOL : On reprend la matrice établie à la question (1) et on reporte la formule (6) dans (7) en prenant soin de remplacer $\mathbf{A}_\mathbf{F}$ par $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_{n+1} &= \mathbf{Y}_n + \frac{h}{2}\left[\mathbf{A}\mathbf{Y}_n + \mathbf{A}\left(\mathbf{Y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{A}\mathbf{Y}_n\right)\right] = \mathbf{Y}_n + \frac{h}{2}\left[2\mathbf{A}\mathbf{Y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{Y}_n\right] \\ &= \mathbf{Y}_n + h\mathbf{A}\mathbf{Y}_n + \frac{h^2}{4}\mathbf{A}^2\mathbf{Y}_n = \left(\mathbf{I} + h\mathbf{A} + \frac{h^2}{4}\mathbf{A}^2\right)\mathbf{Y}_n\end{aligned}$$

RMQ : On peut effectuer le calcul

$$\begin{aligned}\mathbf{I} + h\mathbf{A} + \frac{h^2}{4}\mathbf{A}^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} + \frac{h^2}{4}\begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 30 & 19 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - 3\frac{h^2}{2} & h - 5\frac{h^2}{4} \\ -6h + 15\frac{h^2}{2} & 1 - 5h + 19\frac{h^2}{4} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

15. On introduit dans le schéma numérique de la question précédente la transformation $\mathbf{Z}_n = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{Y}_n$. Montrer que le schéma de Heun se met sous la forme :

$$\mathbf{Z}_{n+1} = \left(\mathbf{I} + h\mathbf{D} + \frac{h^2}{4}\mathbf{D}^2\right)\mathbf{Z}_n \tag{8}$$

SOL : A partir de $\mathbf{Y}_{n+1} = \left(\mathbf{I} + h\mathbf{A}_\mathbf{F} + \frac{h^2}{4}\mathbf{A}_\mathbf{F}^2\right)\mathbf{Y}_n$, on a $\mathbf{V}\mathbf{Z}_n = \mathbf{Y}_n$ donc $\mathbf{V}\mathbf{Z}_{n+1} = \left(\mathbf{I} + h\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1} + \frac{h^2}{4}\mathbf{V}\mathbf{D}^2\mathbf{V}^{-1}\right)\mathbf{V}\mathbf{Z}_n = \left(\mathbf{V} + h\mathbf{V}\mathbf{D} + \frac{h^2}{4}\mathbf{V}\mathbf{D}^2\right)\mathbf{Z}_n$. En multipliant à gauche par $\mathbf{V}^{-1}$on obtient $\mathbf{Z}_{n+1} = \left(\mathbf{I} + h\mathbf{D} + \frac{h^2}{4}\mathbf{D}^2\right)\mathbf{Z}_n$.

RMQ : Il s'agit du même principe que le calcul effectué à la question 11.

16. On note $\mathbf{H}$ la matrice

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} + h\mathbf{D} + \frac{h^2}{4}\mathbf{D}^2$$

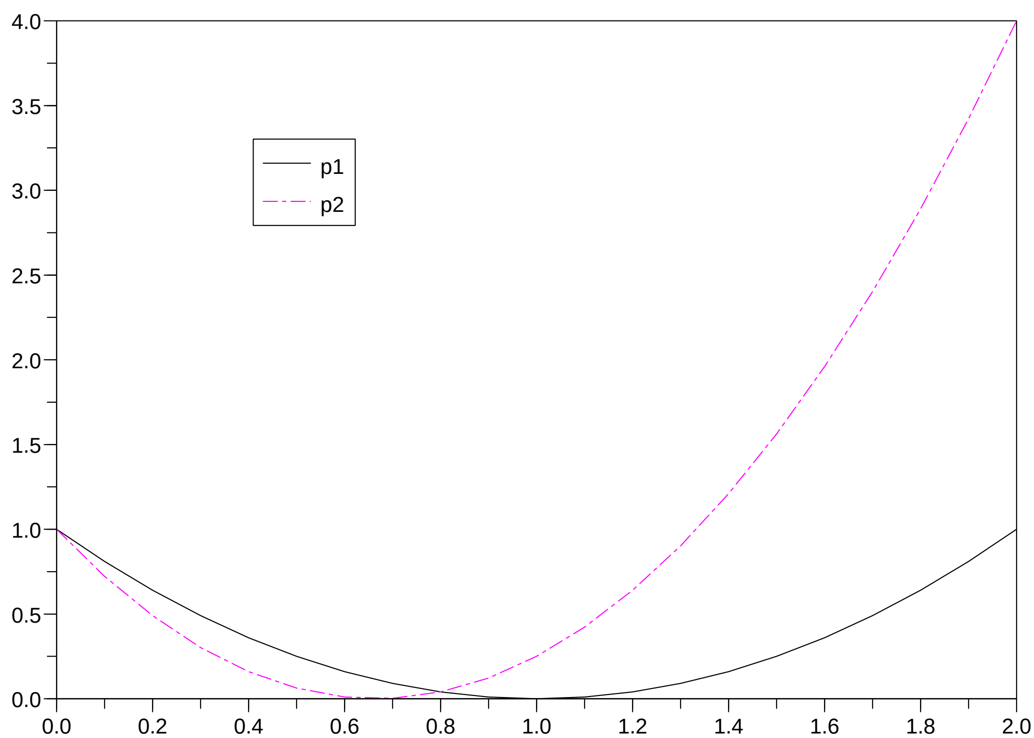
Quelle condition portant sur son rayon spectral la matrice $\mathbf{H}$ doit-elle vérifier pour que les itérations définies en (8) convergent ? (On rappelle que le rayon spectral d'une est la plus grande, en module, valeur propre de la matrice.)

SOL : Les itérations définies en (8) représentent une méthode itérative de la forme $\mathbf{Z}_{n+1} = \mathbf{H}\mathbf{Z}_n$, qui converge si $\rho(\mathbf{H}) < 1$.

17. On introduit les polynômes p_1 et p_2 définis par

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^2 - 2x + 1 \\ p_2(x) &= \frac{9}{4}x^2 - 3x + 1 \end{aligned}$$

Leurs comportements respectifs sont donnés par la figure suivante sur l'intervalle $[0, 2]$.



En déduire pour quel intervalle de valeurs de h la méthode de Heun converge.

SOL : La matrice H est diagonale et du fait que $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ on a

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} + h\mathbf{D} + \frac{h^2}{4}\mathbf{D}^2 = \begin{pmatrix} 1 - 3h + \frac{9h^2}{4} & 0 \\ 0 & 1 - 2h + h^2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $\mathbf{H}$ sont donc égales à $p_1(h)$ et $p_2(h)$. Leurs comportements respectifs pour $h > 0$ sont données par la figure et on observe que :

- pour $h < 0.8$, $\rho(\mathbf{H}) = p_1(h)$ et sur cet intervalle $p_1(h) < 1$ donc la méthode de Heun converge.
- pour $h \geq 0.8$, $\rho(\mathbf{H}) = p_2(h)$ et sur cet intervalle $p_2(h) < 1$ pour $\frac{9}{4}h^2 - 3h + 1 < 1$ soit $\frac{9}{4}h - 3 < 0 \Leftrightarrow h < \frac{4}{3}$.

La zone de convergence correspond donc à $0 \leq h < \frac{4}{3}$.

Remarque : la méthode de Heun est plus intéressante que la méthode d'Euler explicite car elle est d'ordre plus élevé (pour Euler et 2 pour Heun) et en même temps assure la convergence pour un pas de discrétisation plus important (ce qui permet de réduire le nombre d'itérations). Le résultat sur h n'est toutefois pas généralisable à tous les systèmes différentiels, la démonstration n'ayant été faite que dans le cas particulier de cet exercice.

Partie D

On s'intéresse à l'approximation par interpolation de Lagrange du système obtenu par le schéma d'Euler à la question 10a. On prend $h = 1$ et on a les points $(t_i, y_{1,i}y_{2,i})_{i=0,1,2}$ suivants :

t_i	0	1	2
y_{1i}	1	1	-10
y_{2i}	1	-10	34

RMQ : Comme précisé plus haut l'inconnue est vectorielle, on a donc ici un vecteur $\mathbf{Y}$ dont les deux composantes y_1 et y_2 sont discrétisées et pour lesquelles on connaît trois points : $y_{1,1}, y_{1,2}$ et $y_{1,3}$ pour y_1 ; $y_{2,1}, y_{2,2}$ et $y_{2,3}$ pour y_2.

18. Donner l'expression du polynôme d'interpolation de Lagrange $P_2(x)$ relatif aux points ci-dessus.

RMQ : P_2 est un polynôme vectoriel, à deux composantes.

SOL : On sait que

$$P_{j,2}(t) = \sum_{i=0}^{2} y_i \varphi_i(t) \quad ; j = 1, 2$$

où les fonctions φ_i sont les polynômes de Lagrange et sont données par :

$$\varphi_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} \frac{t - t}{t_i - t_j}, i = 0, 1, 2$$

Par suite

$$\begin{aligned} P_{1,2}(t) &= \varphi_0(t) + \varphi_1(t) - 10\varphi_2(t) \\ P_{2,2}(t) &= \varphi_0(t) - 10\varphi_1(t) + 34\varphi_2(t) \end{aligned}$$

avec

$$\varphi_0(t) = \frac{(t - t_1)(t - t_2)}{(t_0 - t_1)(t_0 - t_2)} = \frac{(t - 1)(t - 2)}{2}$$

$$\varphi_1(t) = \frac{(t - t_0)(t - t_2)}{(t_1 - t_0)(t_1 - t_2)} = -t(t - 2)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{(t - x_0)(t - t_1)}{(t_2 - t_0)(t_2 - t_1)} = \frac{t(t - 1)}{2}$$

RMQ : Les réponses ne tenant compte que d'une composante ont été retenues.

19. Évaluez l'approximation de Lagrange pour $t = 0.5$. Que pensez-vous de la qualité de cette approximation si vous la comparez avec la valeur pour $t = 0.5$ obtenue par le schéma d'Euler.

    SOL : $\varphi_0(t) = \frac{0.75}{2} = 0.375, \varphi_1(t) = 0.75, \varphi_2(t) = -\frac{0.25}{2} = -0.125$

    $p_{1,2}(t) = 0.375 + 0.75 + 1.25 = 2.375$

    $p_{2,2}(t) = 0.375 - 7.5 - 4.25 = -11.375$

    Si on utilise le schéma d'Euler, on a $y_1(0) = 1$ et $y_2(0) = 1$ d'après le tableau de valeurs, et $h = 0,5$ donc

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & h \\ -6h & 1-5h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ -3 & -1,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -4,5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

    on a pour $t = 0.5$: $y_1(0.5) = 1.5$ et $y_2(0.5) = -4.5$. L'approximation est assez mauvaise.

    PARTIE E

    Méthodes iteratives pour l'inversion matricielle.

    On considère de nouveau la matrice de la question 1: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$. On cherchera à inverser cette matrice en utilisant la méthode de Jacobi.

20. Modéliser le problème, c'est-à-dire établir les équations du système à résoudre.

    SOL : $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ où $\mathbf{X}$ est l'inverse de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{I}$ la matrice identité.

    RMQ : Les mots clefs indiquant la réponse étaient "inverser cette matrice"

21. La méthode de Jacobi ne peut aps s'appliquer directement, car l'élément $A(1,1)$ de la matrice $\mathbf{A}$ est nul. Dans ce cas on permute la première avec la deuxième ligne de $\mathbf{A}$ et on obtient ainsi la matrice $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Supposons que l'inverse de $\mathbf{A}'$ est donnée par $(\mathbf{A}')^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Exprimer $\mathbf{A}$ en utilisant les éléments b_{ij}.

    SOL : L'inversion des lignes de $\mathbf{A}$ consiste à multiplier à gauche par une matrice de permutation $\mathbf{P}$, soit $\mathbf{A}' = \mathbf{PA}$, avec $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{PA})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}^{-1}$. Donc $\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{P}$. La postmultiplication par $\mathbf{P}$ correspond à une inversion des colonnes de $(\mathbf{A}')^{-1}$ soit $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} b_{12} & b_{11} \\ b_{22} & b_{21} \end{pmatrix}$.

22. Donner la formulation itérative de la méthode de Jacobi sous la forme

$$\mathbf{x}_i^{(k+1)} = \mathbf{J}\mathbf{x}_i^{(k)} + \mathbf{G}\mathbf{e}_i, i = 1, 2$$

    en précisant les matrices $\mathbf{J}$ et $\mathbf{G}$.

    SOL : On décompose $\mathbf{A}'$ sous la forme $\mathbf{A}' = \mathbf{M} - \mathbf{N} = \mathbf{D} - \mathbf{E} - \mathbf{F}$ avec $\mathbf{M} = \mathbf{D}$ et $\mathbf{N} = \mathbf{E} + \mathbf{F}$ et le schéma de Jacobi s'exprime par

$$\mathbf{M}\mathbf{x}_i^{(k+1)} = \mathbf{N}\mathbf{x}_i^{(k)} + \mathbf{e}_i \Leftrightarrow \mathbf{D}\mathbf{x}_i^{(k+1)} = (\mathbf{E} + \mathbf{F})\mathbf{x}_i^{(k)} + \mathbf{e}_i$$

où $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^2$ vecteurs canoniques. Donc

$$\mathbf{x}_i^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E}+\mathbf{F})\mathbf{x}_i^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{e}_i$$

Ici on a donc

$$\mathbf{J} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E}+\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} -1/6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5/6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{G} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{G}\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -1/6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

23. Etablir si la méthode est convergente.

    SOL : Pour que la méthode soit convergente il faut et il suffit que la matrice d'itération $\mathbf{J}$ vérifie $\rho(\mathbf{J}) < 1$ où $\rho(\mathbf{J})$ est le rayon spectral de $\mathbf{J}$, i.e. la plus grande valeur propre en module. Ici les valeurs propres de J sont les racines de det $\begin{pmatrix} -\lambda & -5/6 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$, d'où $\lambda = 0$, donc $\rho(\mathbf{J}) < 1$ et la méthode est convergente.

    RMQ : Si on écrit les équations des itérations on a pour la première colonne ($i = 1$)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^{(k+1)} &= \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E}+\mathbf{F})\mathbf{x}_1^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{e}_1 \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} x_{1,1}^{(k+1)} \\ x_{1,2}^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5/6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1}^{(k)} \\ x_{1,2}^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/6 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_{1,1}^{(k+1)} = -5/6 x_{1,2}^{(k)} - 1/6 \\ x_{1,2}^{(k+1)} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_{1,1}^{(k+1)} = -1/6 \\ x_{1,2}^{(k+1)} = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

    Les itérations sont stationnaires.

    Et pour la deuxième colonne ($i = 2$)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2^{(k+1)} &= \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E}+\mathbf{F})\mathbf{x}_2^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{e}_2 \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} x_{2,1}^{(k+1)} \\ x_{2,2}^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5/6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2,1}^{(k)} \\ x_{2,2}^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_{2,1}^{(k+1)} = -5/6 x_{2,2}^{(k)} \\ x_{2,2}^{(k+1)} = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_{2,1}^{(k+1)} = -5/6 \\ x_{2,2}^{(k+1)} = 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

    Les itérations sont encore stationnaires, la méthode est donc bien convergente. On retrouve bien

$$(\mathbf{A}')^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & -5/6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

    et on peut reconstituer $\mathbf{A}^{-1}$ par $\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A}')^{-1}\,\mathbf{P}$.