EISTI - DÉPARTEMENT MATHEMATIQUES

CORRIGE DE L'EXAMEN D'ANALYSE NUMÉRIQUE

(2ème session du Second semestre)

3 juillet 2007 – **DURÉE 3h00**

1 Calcul des erreurs

Soit la matrice A, les vecteurs b et $b+\delta b$ suivants avec $\varepsilon > 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b+\delta b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\varepsilon \end{pmatrix}$$

1. Résoudre les systèmes $Ax = b$ et $Ax_\varepsilon = b + \delta b$

   SOL : On trouve $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $x_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Que vaut l'erreur relative sur la solution x en norme 1 en fonction de ε ?

   SOL : L'erreur relative sur x est donnée par

$$e_x = \frac{\|x - x_\varepsilon\|_1}{\|x\|_1} = \frac{\|(1,-1)\|_1}{\|(1,0)\|_1} = \frac{2}{1} = 2$$

3. Que vaut l'erreur relative sur le second membre b en norme 1 en fonction de ε ?

   SOL : L'erreur relative sur b est donnée par

$$e_b = \frac{\|b - (b+\delta b)\|_1}{\|b\|_1} = \frac{\|\delta b\|_1}{\|b\|_1} = \frac{\|(0,\varepsilon)\|_1}{\|(1,1)\|_1} = \frac{\varepsilon}{2}$$

4. En déduire une minoration du conditionnement de A en fonction de ε.

   SOL : On a la relation suivante entre erreurs relatives et conditionnement :

$$\frac{\|x - x_\varepsilon\|_1}{\|x\|_1} \leq cond_1(A) \frac{\|\delta b\|_1}{\|b\|_1}$$

   d'où la minoration

$$cond_1(A) \geq \frac{\|x - x_\varepsilon\|_1}{\|x\|_1} \frac{\|b\|_1}{\|\delta b\|_1}$$

   ici

$$cond_1(A) \geq 2\frac{2}{\varepsilon} = \frac{4}{\varepsilon}$$

5. Calculer le conditionnement de A en norme 1.

   SOL : Par définition on a :

$$cond_1(A) = \|A\|_1 \left\|A^{-1}\right\|_1$$

   De $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}$ on déduit $A^{-1} = \frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix} 1+\varepsilon & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\|A\|_1 = 2+\varepsilon$ et $\left\|A^{-1}\right\|_1 = \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}$.

   On en tire

$$cond_1(A) = \frac{(2+\varepsilon)^2}{\varepsilon}$$

6. Est-ce cohérent avec l'estimation trouvée à la question 4 ?

   SOL : Comme $\varepsilon > 0$ on a $cond_1(A) = \frac{(2+\varepsilon)^2}{\varepsilon} \geq \frac{4}{\varepsilon}$ ce qui est bien cohérent avec le résultat trouvé précédemment.

2 Algèbre linéaire

On considère le système linéaire $Ax = b$ où

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. On veut résoudre le système par la méthode de Jacobi.

   (a) Donner la formulation itérative de la méthode de Jacobi sous la forme

   $$x^{(k+1)} = Jx^{(k)} + Gb$$

   en précisant les matrices J et G.

   SOL : On décompose A sous la forme $A = M - N = D - E - F$ avec $M = D$ et $N = E + F$ et le schéma de Jacobi s'exprime par

   $$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b \Leftrightarrow Dx^{(k+1)} = (E + F)x^{(k)} + b$$

   donc

   $$x^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)x^{(k)} + D^{-1}b$$

   Ici on a donc

   $$J = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

   et

   $$G = D^{-1}b = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

   (b) Etablir si la méthode est convergente.

   SOL : Pour que la méthode soit convergente il faut et il suffit que la matrice d'itération J vérifie $\rho(J) < 1$ où $\rho(J)$ est le ratyon spectral de J, i.e. la plus grande valeur propre en module. Le calcul des valeurs propres donne :

   $$\begin{aligned} \det(J - \lambda I) &= \begin{pmatrix} -\lambda & 0.5 & 0 \\ 0.5 & -\lambda & 0.5 \\ 0 & 0.5 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) - 0.5(-0.5\lambda) \\ &= -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\right) = -\lambda\left(\lambda - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\lambda + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

   donc $\rho(J) = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ donc la méthode converge.

2. On perturbe le système en $A_\varepsilon x = b_\varepsilon$ où

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2+\varepsilon & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } b_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

   (a) Montrer que la solution de $Ax = b$ est la même que celle de $A_\varepsilon x = b_\varepsilon$.

   SOL : On voit que $\tilde{x} = (1, 1, 1)$ est solution des deux systèmes linéaires.

   (b) On suppose que $\varepsilon > 0$. Montrer sans calcul que la méthode de Jacobi est convergente.

   SOL : Du fait que $\varepsilon > 0$ la matrice A_ε est à diagonale strictement dominante donc elle est définie positive, donc la méthode de Jacobi converge.

   (c) On suppose que $\varepsilon < 0$. Déterminer la valeur ε_0 telle que la méthode de Jacobi converge pour tout $\varepsilon \in]\varepsilon_0, 0[$.

   (On indique que les valeurs propres de la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ \frac{1}{2+\varepsilon} & 0 & \frac{1}{2+\varepsilon} \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ sont $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2+\varepsilon}}$ et $\lambda_3 = -\frac{1}{\sqrt{2+\varepsilon}}$.)

   SOL : La matrice A_ε n'étant plus définie positive on doit encore calculer le rayon spectral de la matrice d'itération, et donc ses valeurs propres. On montre que $J_\varepsilon = D_\varepsilon^{-1}(E + F) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2+\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ \frac{1}{2+\varepsilon} & 0 & \frac{1}{2+\varepsilon} \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = C$. On a donc $\rho(J_\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2+\varepsilon}}$. Pour que $\rho(J_\varepsilon) < 1$ il faut que $\sqrt{2+\varepsilon} > 1 \Leftrightarrow \varepsilon > -1$. Donc $\varepsilon_0 = -1$.

3. On veut résoudre le système par la méthode de Jacobi relaxé.

   (a) Donner la formulation itérative de la méthode de Jacobi relaxé sous la forme

$$x^{(k+1)} = J_\omega x^{(k)} + G_\omega b$$

   en précisant les matrices J_ω et G_ω.

   SOL : La méthode est donnée par

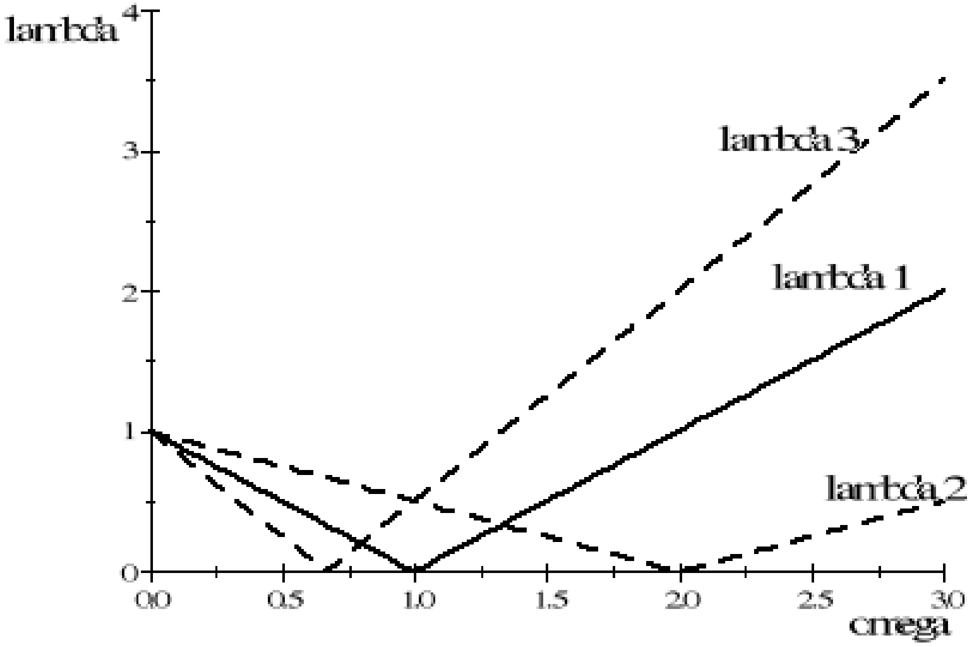
$$x^{(k+1)} = \left[(1-\omega)I + \omega D^{-1}(E + F)\right] x^{(k)} + \omega D^{-1} b$$

   donc $G_\omega = \omega D^{-1}$ et

$$\begin{aligned} J_\omega &= \left[(1-\omega)I + \omega D^{-1}(E + F)\right] \\ &= (1-\omega)I + \omega J = (1-\omega) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-\omega & \frac{\omega}{2} & 0 \\ \frac{\omega}{2} & 1-\omega & \frac{\omega}{2} \\ 0 & \frac{\omega}{2} & 1-\omega \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   (b) Quelle est la condition nécessaire sur ω pour que la méthode converge ?

   SOL : D'après le cours on sait qu'il faut $0 < \omega < \mathbf{2}$.



(c) Les valeurs propres de la matrice J_ω sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 - \omega \\ \lambda_2 = 1 - \frac{\omega}{2} \\ \lambda_3 = 1 - \frac{3\omega}{2} \end{cases}$$

En utilisant le graphique ci-dessous déterminer la condition suffisante sur ω assurant la convergence.

SOL : Pour que $\rho(J_\omega) < 1$ il faut que la valeur propre la plus grande soit inférieure à 1. On voit que pour $\omega < 1$, c'est toujours le cas. Par contre pour $\omega > 1$, la valeur propre la plus grande est λ_3 et elle est inférieure à 1 si $\omega < \frac{4}{3}$. Donc la condition suffisante sur ω assurant la convergence est $0 < \omega < \frac{4}{3}$

Pour quelles valeurs de ω la convergence est-elle la plus rapide ?

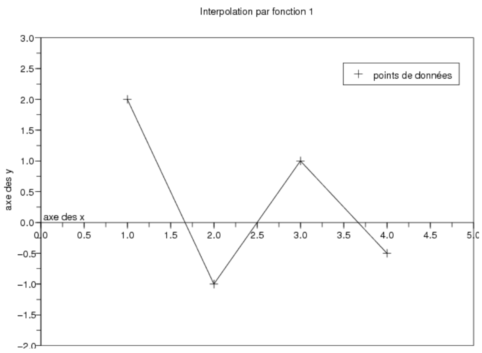
SOL : La convergence est la plus rapide lorsque $\rho(J_\omega)$ est le plus grand, donc lorsque ω est proche de $\frac{4}{3}$, tout en restant inférieur.

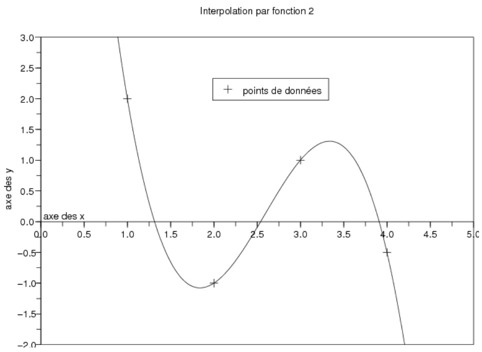
3 Interpolation

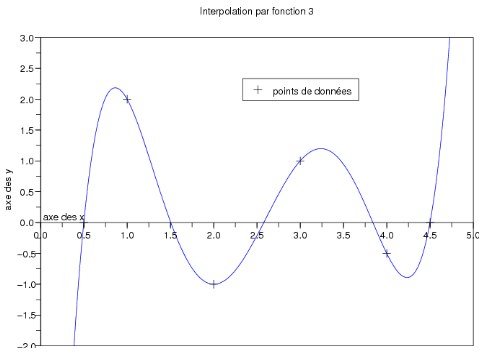
On s'intéresse à l'approximation par interpolation de Lagrange de la fonction donnée par les points $(x_i, y_i)_{i=1,\dots 4}$ suivants :

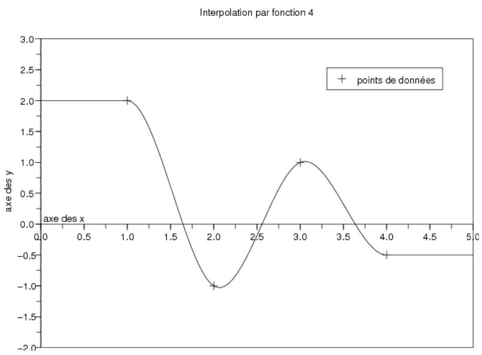
x_i	1	2	3	4
y_i	2	-1	1	-0.5

1. Parmi les quatre fonctions utilisées pour réaliser l'interpolation, et représentées sur les graphiques ci-dessous, laquelle est une fonction d'interpolation de Lagrange ? (Justifiez soigneusement votre réponse).









SOL : Les 4 fonctions passent par les points de données, donc elle réalisent toutes une forme d'interpolation. La fonction 1 est linéaire par morceaux, il ne s'agit donc pas d'un polynôme, et elle ne peut donc pas être l'interpolé de Lagrange.
La fonction 4 est constante par morceaux, mais non globalement donc elle n'est pas non plus polynomiale, et elle ne peut donc pas être l'interpolé de Lagrange. Reste les fonctions 2 et 3. L'interpolé de Lagrange cherché passe par 4 points, il s'agit donc d'un polynome de degré 3, qui admet au plus 4 racines réelles. Or on remarque que la fonction 3 intersecte l'axe des abscisses en 5 points, elle admet donc 5 racines et ne peut donc pas être de degré 3. Seule la fonction 2 peut être l'interpolé de Lagrange.

2. Donner l'expression du polynôme d'interpolation de Lagrange $p_4(x)$ relatif aux points ci-dessus.
   SOL : On sait que
$$p_4(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i \varphi_i(x)$$
   où les fonctions φ_i sont les polynômes de Lagrange et sont donnés par :
$$\varphi_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{3} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, i = 0, ...3$$
   Par suite
$$p_4(x) = 2\varphi_0(x) - \varphi_1(x) + \varphi_2(x) - 0.5\varphi_3(x)$$
   avec
$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \\
&= \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(-1)(-2)(-3)} = -\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{6}
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \\
&= \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(1)(-1)(-2)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{2}
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \\
&= \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(2)(1)(-1)} = -\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{2}
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
\varphi_3(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \\
&= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(3)(2)(1)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}
\end{aligned}$$

3. La fonction exacte étant de la forme
$$f(x) = a\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + bx + ce^x + d$$
   montrer que l'erreur d'interpolation $E_f(x)$ au point $x = 0$ est majorée par
$$|E_f(0)| \leq |a|\,\frac{\pi^4}{16} + |c|\,e^4$$
   SOL : On sait que l'erreur d'interpolation est donnée par
$$E_f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{3}(x - x_j)$$

pour un certain $\xi \in [1,3]$. Il suffit donc de calculer $f^{(4)}$ et de la majorer. On voit facilement que

$$f^{(4)}(x) = a\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + ce^x$$

donc

$$\left|f^{(4)}(x)\right| \leq |a|\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 + |c|\, e^3$$

puisque la fonction sinus est bornée l'exponentielle croissante. Par suit on en déduit que pour tout $\xi \in [1,3]$ on a :

$$\left|f^{(4)}(\xi)\right| \leq |a|\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 + |c|\, e^3$$

De plus

$$\prod_{j=0}^{3}(0 - x_j) = (-1)(-2)(-3)(-4)$$

d'où

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{3}(x - x_j)\right| \leq |a|\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 + |c|\, e^3$$

4 Intégration

On s'intéresse à l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

de la fonction f définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

1. Montrer que la valeur exacte de I est $\frac{\pi}{4}$.

   SOL :

   $$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [Arc\tan x]_0^1 = Arc\tan 1 - Arc\tan 0 = \frac{\pi}{4}$$

2. On réalise le calcul approché de cette intégrale en choisissant deux points :

   $$\begin{aligned} a &= x_0 = 0 \\ b &= x_1 = 1 \end{aligned}$$

   (a) Déterminer la valeur approchée obtenue par la méthode des trapèzes

   SOL : L'approximation par la méthode des trapèzes avec un seul intervalle donne pour valeur approché $\hat{I}_{T,1}$:

   $$\hat{I}_{T,1} = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$$

(b) Déterminer la valeur approchée obtenue par la méthode de Simpson

SOL : L'approximation par la méthode de Simpson avec un seul intervalle, c'est à dire 3 points dont le milieu, donne pour valeur approché $\hat{I}_{S,1}$:

$$\begin{aligned}\hat{I}_{S,1} &= \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) \\ &= \frac{1}{6}(1 + 4.\frac{4}{5} + \frac{1}{2}) = \frac{47}{60}\end{aligned}$$

3. On choisit maintenant trois points :

$$\begin{aligned}x_0 &= 0 \\ x_1 &= 0.5 \\ x_2 &= 1\end{aligned}$$

(a) Déterminer la valeur approchée obtenue par la méthode des trapèzes

SOL : L'approximation par la méthode des trapèzes avec deux intervalles donne pour valeur approché $\hat{I}$:

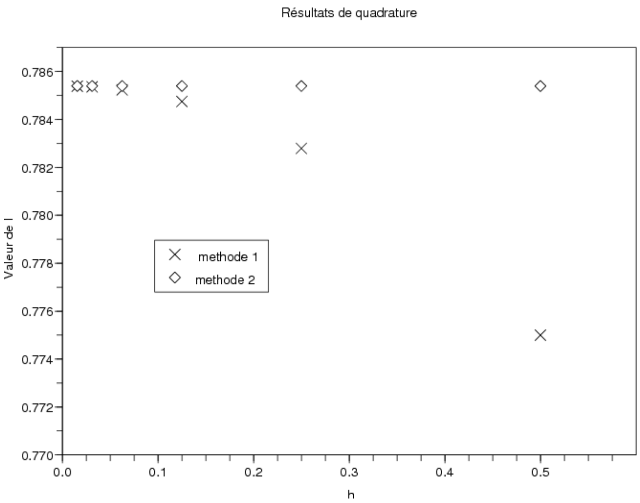
$$\begin{aligned}\hat{I}_{T,2} &= \frac{x_1 - x_0}{2}\left(f(x_1) + f(x_0)\right) + \frac{x_2 - x_1}{2}\left(f(x_2) + f(x_1)\right) \\ &= \frac{x_2 - x_0}{4}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2)\right) \\ &= \frac{1}{4}(1 + 2.\frac{4}{5} + \frac{1}{2}) = \frac{31}{40}\end{aligned}$$

(b) Indiquer la formule permettant d'obtenir le résultat par la méthode de Simpson (on ne demande pas d'évaluer le résultat)

SOL : Sur chacun des intervalles $[x_0, x_1]$ et $[x_1, x_2]$ on applique la formule de Simpson, et on obtient :

$$\begin{aligned}\hat{I}_{S,2} &= \frac{x_1 - x_0}{6}\left(f(x_0) + 4f(\frac{x_0 + x_1}{2}) + f(x_1)\right) + \frac{x_2 - x_1}{6}\left(f(x_1) + 4f(\frac{x_1 + x_2}{2}) + f(x_2)\right) \\ &= \frac{x_2 - x_0}{12}\left(f(x_0) + 4f(\frac{x_0 + x_1}{2}) + 2f(x_1) + 4f(\frac{x_1 + x_2}{2}) + f(x_2)\right)\end{aligned}$$

4. On a programmé ces deux méthodes pour plusieurs valeurs du pas h et les résultats ont été reportés sur le graphique ci-dessous.



(a) Entourez les points du graphique qui fournissent la valeur approchée la plus fiable et donnez cette valeur.**SOL** : Les points à entourer sont les deux qui correspondent à la plus petite valeur de h puisque ce sont ceux qui seront les plus précis.

(b) Parmi les deux méthodes dont les résultats sont représentés, laquelle est celle des trapèzes, laquelle est celle de Simpson (justifier votre réponse)

SOL : La méthode des trapèzes étant moins précise que celle de Simpson, la méthode 1 est celle des trapèzes, la méthode 2 celle de Simpson.

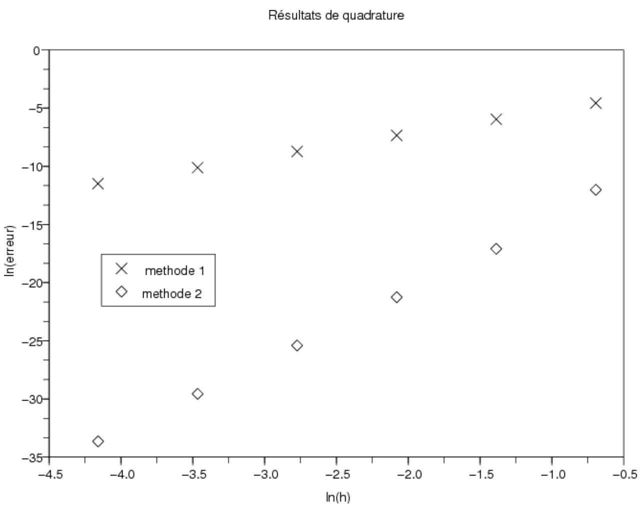
5. Avec chaque méthode on obtient une valeur approchée de I que l'on note $\hat{I}$ ($\hat{I}_S$ pour l'intégration numérique par la méthode de Simpson et $\hat{I}_T$ pour l'intégration numérique par la méthode des trapèzes). On introduit l'erreur de chaque méthode :

$$\begin{aligned} e_S &= \left|I - \hat{I}_S\right| \\ e_T &= \left|I - \hat{I}_T\right| \end{aligned}$$

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les quantités

$$\ln\left(e_S\right) = \ln\left(\left|\frac{\pi}{4} - \hat{I}_S\right|\right) \text{ et } \ln\left(e_T\right) = \ln\left(\left|\frac{\pi}{4} - \hat{I}_T\right|\right)$$

en fonction de $\ln(h)$.



Quelles informations pouvez-vous tirer du graphique ?

SOL : On constate que pour les deux méthodes il y a une relation linéaire entre $x = \ln(h)$ et $y = \ln(e)$. On peut donc affirmer qu'il existe pour chaque méthode deux constantes α et β telles que

$$\ln(e) = \alpha \ln(h) + \beta$$

soit

$$e = ch^{\alpha}$$

C'est une relation connue puisque la méthode des rectangles est d'ordre 2 ($\alpha = 2$) et celle de Simpson d'ordre 4 ($\alpha = 4$).

5 Équations différentielles

Soit l'équation différentielle

$$y''(t) + c^2 y(t) = 0; \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ 0 \le t \le 10$$

1. Vérifier que la solution de cette équation est

$$y(t) = \cos(ct) + \frac{1}{c}\sin(ct)$$

SOL : On dérive : $y'(t) = -c\sin(ct) + \cos(ct)$ puis $y''(t) = -c^2\cos(ct) - c\sin(ct)$ donc $y''(t) + c^2 y(t) = -c^2\cos(ct) - c\sin(ct) + c^2\cos(ct) + c\sin(ct) = 0$. La fonction y est donc bien solution de l'équation. Elle vérifie de plus $y(0) = \cos(0) + \frac{1}{c}\sin(0) = 1$ et $y'(0) = -c\sin(0) + \cos(0) = 1$.

2. Convertir cette équation en un système de deux équations différentielles du premier ordre.

SOL : On pose

$$\mathbf{w}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

alors

$$\mathbf{w}'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$$

et on a :

$$y''(t) = -c^2 y(t)$$

donc

$$\mathbf{w}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{w}(t)$$

soit le système

$$\begin{cases} y'(t) = z(t) \\ z'(t) = -c^2 y(t) \end{cases}$$

3. En prenant $h = 0.01$ et $c = 2$, appliquer le schéma de l'Euler pour résoudre le système obtenu à la question précedente.

SOL : Soit un système d'équations différentielles muni de conditions aux limites, c'est à dire un problème de Cauchy vectoriel, de la forme :

$$\begin{cases} Y'(t) = F(Y(t)) \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases} \tag{2}$$

où Y et Y_0 désignent des fonctions de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, et F une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ de matrice A_F.

On considère une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ de la forme $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$.

Le schéma d'**Euler explicite** appliqué à la résolution du problème (2) pour la subdivision donnée, se met sous la forme :

$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + hA_F Y_n \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases} \tag{3}$$

où Y_n désigne l'approximation dans $\mathbb{R}^2$ de la quantité $Y(t_n)$.

En appliquant cela dans notre cas, on obtient :

$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix} Y_n = \begin{pmatrix} 1 & h \\ -hc^2 & 1 \end{pmatrix} Y_n \\ Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Pour $c = 2$ et $h = 0.01$ on obtient

$$\begin{cases} Y_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0.01 \\ -0.04 & 1 \end{pmatrix} Y_n \\ Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

A partir de $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ on a

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.01 \\ -0.04 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.01 \\ 0.96 \end{pmatrix}$$

On s'aperçoit que le schéma diverge en effet les valeurs propres de A_F sont $1 + 0.02i$ et $1 - 0.02i$ donc $\rho(A_F) = |1 + 0.02i| > 1$.

4. Même question pour le schéma Runge-Kutta du 2e ordre.

   SOL : La méthode de Runge-Kutta du $2^{ème}$ ordre n'est autre que la méthode de Heun, ou encore méthode d'Euler améliorée, ou méthode de prédicteur-correcteur donnée pour une suite quelconque $(u_n)_n$ par :

$$\begin{cases} u^*_{n+1} = u_n + hf_n \\ u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f_n + f(t_{n+1}, u^*_{n+1})\right] \end{cases}$$

   Le schéma de **Heun** se décompose en deux étapes :

   – une étape de prédiction, pendant laquelle on calcule

$$\overline{Y_{n+1}} = Y_n + \frac{h}{2} A_F Y_n \tag{4}$$

   – une étape de correction, pendant laquelle on calcule

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}\left[A_F Y_n + A_F \overline{Y_{n+1}}\right] \tag{5}$$

(a) On reprend la matrice établie à la question 2 et on reporte la formule (4) dans (5)

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= Y_n + \frac{h}{2}\left[A_F Y_n + A_F\left(Y_n + \frac{h}{2}A_F Y_n\right)\right] = Y_n + \frac{h}{2}\left[2A_F Y_n + \frac{h}{2}A_F^2 Y_n\right] \\ &= Y_n + hA_F Y_n + \frac{h^2}{4}A_F^2 Y_n = \left(I + hA_F + \frac{h^2}{4}A_F^2\right) Y_n \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= \left(I + h\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{h^2}{4}\begin{pmatrix} -c^2 & 0 \\ -0 & -c^2 \end{pmatrix}\right) Y_n \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{c^2h^2}{4} & h \\ -hc^2 & 1 - \frac{c^2h^2}{4} \end{pmatrix} Y_n \end{aligned}$$

On s'aperçoit que le schéma diverge aussi en effet les valeurs propres de la matrice d'itérations sont $-\frac{1}{4}c^2h^2 + ich + 1$ et $-\frac{1}{4}c^2h^2 - ich + 1$ donc $\rho(A_F) = \left|-\frac{1}{4}c^2h^2 + ich + 1\right| = \sqrt{1 + \frac{1}{16}c^4h^4 + \frac{1}{2}c^2h^2} > 1$.