EISTI - DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES

EXAMEN DE RATTRAPAGE D'ANALYSE NUMÉRIQUE

6 juin 2006 – **DURÉE 3h00**
La consultation de documents, l'échange de documents et l'usage de calculatrice sont interdits.
Seule l'utilisation des 3 feuilles manuscrites recto-verso format A4 est autorisée.

- **Ne pas détacher les feuilles**
- **Utiliser l'espace blanc pour vos réponses**
- **Penser à indiquer votre nom sur chaque feuille**

NOM : ....

NOTE

DÉTAIL

	1	2a	2b)i	2b)ii	2b)iii
Exercice 1					

	1	2	3
Exercice 2			

	1	2	3	4	5	6	7
Exercice 3							

	1	2a	2b	3a	3b	3c
Exercice 4						

4a	4b	4c

Exercice 1 : Décomposition LU

1. Soit la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

   Décomposer A sous la forme LU. (On rappelle que L est à diagonale unité)

2. On se place dans le cadre général où A est une matrice carrée de taille n. On suppose que A est tridiagonale c'est à dire de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{ij} & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

   On **admet** que les matrices L et U ont le même profil que A c'est à dire qu'en plus des termes nuls par définition dans L et U, seuls les termes diagonaux, surdiagonaux et sous-diagonaux peuvent être non nuls.

   (a) Donner l'expression de a_{ij} en fonction des termes généraux des matrices L et U, en utilisant la structure de la matrice A

(b) Afin d'optimiser le stockage en mémoire de la matrice A on utilise des vecteurs et non une matrice. Soient donc $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ donnés et $\overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{d}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^{n-1}$ donnés. On considère alors la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ d_1 & a_2 & c_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & d_2 & a_3 & c_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

et on veut résoudre le système linéaire $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ en utilisant la décomposition LU de A. La décomposition est effectuée en écrasant au fur et à mesure les valeurs de A stockées, afin de ne comsommer aucune autre place mémoire.

i. Compléter l'algorithme suivant :
Entrées/ Sorties :
Entrées : $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$
Sorties : la décomposition est stockée dans les vecteurs donnés en entrée

Algorithme de la décomposition LU:
$d(1) := \frac{d(1)}{a(1)}$
Pour $i = 2$ à $n - 1$ faire
. $\quad a(i) := a(i) -$ .... $*$ ......
. $\quad d(i) :=$ ..../........
FPour
$a(n) :=$ .... $-$ .... $*$ ......

ii. Après la décomposition LU de la matrice, on effectue la résolution. Expliquez en quoi la décomposition LU est utile pour la résolution du système linéaire $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

iii. Compléter les algorithmes suivants :
Entrées/ Sorties :
Entrées : $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$, $\overrightarrow{b}$
Sorties : $\overrightarrow{b}$ dans lequel on stocke la solution $\overrightarrow{y}$ puis la solution $\overrightarrow{x}$
Résolution du système linéaire $L\overrightarrow{y} = \overrightarrow{b}$
Pour $i = 1$ à $n - 1$ faire
. $\quad b(i+1) :=$ .... $-$ .... $*$ ....
FPour

Résolution du système linéaire $U\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$
$b(n) = b(n)/a(n)$
Pour $i = n - 1$ à 1 par pas de -1 faire
. $\quad b(i) := [b(i) -$ .... $*$ ....$]/$.........
FPour

Exercice 2 : Moindres carrés

On considère une résistance dont la valeur R varie en fonction de la température θ selon la loi

$$R = a\theta + b\theta^2$$

où a et b sont deux paramètres inconnus que l'on cherche à estimer à partir de m mesures (θ_k, R_k)

1. Proposer une méthode.(On exposera et on détaillera soigneusement la résolution de système permettant d'obtenir le meilleur résultat numérique en machine.)

2. Application numérique : $m = 3$ et on a effectué les mesures suivantes :

θ	R
0	1
1	2
2	5

Déterminer les valeurs des paramètres a et b.

3. On constate au cours des mesures, qu'une erreur entache la troisième mesure, c'est à dire que la valeur $\theta = 2$ est remplacée par $\theta = 2 + \varepsilon$ sans que la valeur de R soit modifiée. On suppose que ε est de la forme 10^{-i} pour $i \in \mathbb{N}$ et tel que $0 \leq i \leq 9$.
   On note
   $$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 + (2+\varepsilon)^2 & 1 + (2+\varepsilon)^3 \\ 1 + (2+\varepsilon)^3 & 1 + (2+\varepsilon)^4 \end{pmatrix}$$
   et
   $$\Delta A = A_\varepsilon - A_0$$
   On suppose que l'influence de cette erreur est négligeable au second membre au sens où le vecteur $\begin{pmatrix} 12 + 5\varepsilon \\ 22 + 10\varepsilon + 5\varepsilon^2 \end{pmatrix}$ peut être remplacé par $\begin{pmatrix} 12 \\ 22 \end{pmatrix}$.
   La résolution du problème est effectuée sur les mesures entachées d'erreur avec la même méthode que sur des mesures exactes.Différents indicateurs sont évalués et représentés sur le graphique ci-dessous (deltaA correspond à ΔA, et A correspond à A_0) .
   On veut savoir pour quelles valeurs de i on aura une erreur relative sur la solution obtenue inférieure à 10^{-5} (c'est à dire si x est la solution exacte et Δx l'erreur sur cette solution, $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq 10^{-5}$) .

   Question : Pouvez-vous, à partir du graphique et de résultats sur les majorations d'erreur, donner les valeurs de i assurant une erreur relative sur la solution obtenue inférieure à 10^{-5} ?
   Indication : $\ln(10^{-5}) \simeq -11.5$

Exercice 3 : Intégration numérique

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On considére la formule d'intégration approchée :

$$\mathcal{F} : \int_0^1 f(t)dt \simeq J(f) \text{ où } J(f) = \frac{1}{2}\left[f(0)+f(1)\right] + \frac{1}{12}\left[f'(0)-f'(1)\right]$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ peut être obtenue en faisant en sorte que la formule de calcul approché

$$\int_0^1 f(t)dt \simeq af(0) + bf(1) + cf'(0) + df'(1)$$

soit d'ordre maximal.

2. Montrer que $\mathcal{F}$ peut aussi être obtenue en appliquant la méthode de Simpson au calcul de $\int_0^1 \left(t-\frac{1}{2}\right) f'(t)dt$ (on pourra intégrer par parties).

3. La méthode est-elle exacte pour les polynomes de degré 3?

4. La méthode est-elle exacte pour les polynomes de degré 4?

5. En déduire l'ordre de la méthode $\mathcal{F}$.

6. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^4$. En intégrant par parties, vérifier que

$$\int_0^1 f(t)dt = J(f) + \frac{1}{24}\int_0^1 \left[t\,(t-1)\right]^2 f^{(4)}(t)dt$$

.

7. En déduire qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $\int_0^1 f(t)dt = J(f) + \frac{1}{720} f^{(4)}(c)$.

On rappelle le théorème suivant : *Formule de la moyenne*

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et supposons que g soit de signe constant sur cet intervalle ($g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$ ou $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a,b]$). Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$$

Exercice 4 : Recherche de racines

On considère la fonction continue $f(x) = \ln(x+1) - 2$ sur l'intervalle $I = [4, 12]$.
On rappelle l'arsenal théorique suivant :

- *Théorème 1 :* Une méthode de point fixe de la forme $x_{n+1} = \phi(x_n)$ converge vers x solution de $x = \phi(x)$ si et seulement si l'application ϕ est strictement contractante, i.e. il existe une constante $L < 1$ telle que ϕ est lispchitzienne de rapport L.

- *Définition :*Une fonction f définie sur un intervalle I, est lipschitzienne de rapport L si :

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|$$

  On peut montrer que f est lipschitzienne de rapport L si et seulement si $\forall x \in I, \quad f'(x) \leq L$

- *Théorème des accroissements finis :* Soit $f : [a, b] \to R$ une fonction à valeurs réelles (a et b réels tels que $a < b$). Si :

  - f est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$
  - f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$,

  alors il existe $c \in]a, b[, \qquad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

- Itérations de la méthode de Newton : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

- Formule de Taylor-Lagrange : Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle $[a, b]$, et $x \in [a, b]$. Alors il existe $c \in [a, x]$ vérifiant :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

1. En sachant que $5 < e^2 < 13$, montrer qu'il existe un zéro α pour la fonction f dans I et qu'il est unique.

2. On utilise la méthode de bissection pour déterminer α.

   (a) On note $[a, b]$ l'intervalle de départ et (a_n) et (b_n) les suites utilisées pour déterminer α. Etablir une majoration de $b_n - a_n$ en fonction de a, b, n.

(b) Estimer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour calculer le zéro α avec une tolérance $tol = 10^{-10}$. On donne $\ln 5 \simeq 1.6$

3. On considère la méthode de point fixe $x_{n+1} = \phi(x_n)$ avec $\phi(x) = x - \ln(x+1) + 2$.

   (a) Montrer que cette méthode est convergente sur l'intervalle I

   (b) Etablir une majoration de $|x_n - \alpha|$ en fonction de x_0, α, L (coefficient de Lipschitz de ϕ), n.

   (c) En supposant que $|x_0 - \alpha| \leq 10^{-1}$, trouver le nombre minimal d'itérations de point fixe nécessaire pour avoir une erreur inférieure à 10^{-10}. On donne $\frac{9 \ln 10}{\ln 12 - \ln 13} \simeq -16.3$

4. On considère enfin la méthode de Newton

   (a) Ecrire le terme général y_n de la suite définie par la méthode de Newton pour trouver le zéro α de f.

   (b) Trouver une constante $C < 1$ telle que l'inégalité suivante

   $$|y_{n+1} - \alpha| \leq C\,|y_n - \alpha|^2$$

   soit satisfaite.

   (c) En supposant que $|y_0 - \alpha| \leq 10^{-1}$, trouver une majoration permettant de déterminer le nombre minimal n d'itérations de la méthode de Newton nécessaire pour avoir une erreur inférieure à 10^{-10}. (On ne demande pas de mener les calculs pour trouver la valeur numérique)