EISTI - DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES

EXAMEN D'ANALYSE NUMÉRIQUE

28 juin 2010 – **DURÉE 3h00**

La consultation et l'échange des documents, et l'utilisation des calculatrices sont interdits.
L'utilisation des 3 feuilles manuscrites recto-verso, format A4 est autorisée

- **Ne pas détacher les feuilles.**
- **Utiliser l'espace blanc pour vos réponses et le verso pour le brouillon.**
- **Pensez à indiquer votre nom sur chaque feuille**

NOM: ....

NOTE

DÉTAIL

Exercice 1.

Exercice 2A.	1a	1b	1c	2a	2b	2c	2d	3	4	5

Exercice 2B.	1	2	3	4	5	6

Exercice 2B.	1	2a	2b

Exercice 4.

Le corrigé se trouve sur* `http://sifoci.eisti.fr`*, rubrique Analyse Numérique.

NOM: ....

Exercice 1

Soit le programme Scilab

```
for i = 1:60
    x = sqrt(x);
end;
for i = 1:60
    x = x^2;
end;
```

qui, pour chaque valeur de `x` $\geq$ `1`, fournit comme résultat la valeur initiale de `x`.

Pourtant si on exécute ce programme avec `x = 100.0`, on a comme résultat `x = 1.0`.

Donner, en la justifiant, une explication pour ce résultat aberrant.

Rappels : *Scilab code les réels en double précision selon le standard IEEE-754. Pour ce codage, nous avons (poly, fasc. 1, p.21) :*

- *nombre de bits pour la mantisse p = 52;*
- *nombre de bits pour l'exposant q = 11;*
- *Biais = 1023,* $E_{\max}$ *= 1023,* $E_{\min}$ *= -1022;*
- *Plus grande valeur = 1.7976E+308 , plus petite valeur positive = 2.2250E-308;*
- *Nombre de chiffres décimaux exacts :* $p/\log_2(10)$ *= 15.65356.*

Nous avons aussi $2^{-60} \approx$ *8.67362E-19.*

NOM: ....

Exercice 2
Soit la matrice $\mathbf{A}$ définie par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix}$$

Partie A : Détermination du conditionnement de $\mathbf{A}$

1. On considère le vecteur $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Calculer $\mathbf{Au}$

NOM: ....

(b) Évaluer $\|\mathbf{Au}\|_\infty$ et $\|\mathbf{u}\|_\infty$

NOM: ....

(c) En déduire une minoration de $\|\mathbf{A}\|_\infty$ en justifiant votre réponse.

NOM: ....

2. On considère le vecteur $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Calculer $\mathbf{A}^{-1}$

NOM: ....

(b) Calculer $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}$

NOM: ....

(c) Évaluer $\left\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}\right\|_\infty$ et $\|\mathbf{v}\|_\infty$

NOM: ....

(d) En déduire une minoration de $\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_\infty$ en justifiant votre réponse.

NOM: ....

3. Déduire des questions précédentes la valeur d'une constante α minorant le conditionnement de $\mathbf{A}$ en norme infinie, $\kappa_\infty(\mathbf{A})$, c'est à dire vérifiant :

$$\kappa_\infty(\mathbf{A}) \geq \alpha$$

NOM: ....

4. Pour une matrice carrée quelconque $\mathbf{M}$ de taille n, énoncer l'expression de $\|\mathbf{M}\|_\infty$ en fonction des éléments m_{ij} de la matrice $\mathbf{M}$.

NOM: ....

5. La minoration de $\kappa_\infty(\mathbf{A})$ peut-elle être améliorée (c'est-à-dire peut-on trouver une constante $\beta > \alpha$ telle que $\kappa_\infty(\mathbf{A}) \geq \beta$) ?

NOM: ....

Partie B : Effet des erreurs d'arrondi sur la résolution d'un système

On considère le système linéaire $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ avec $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1999 \\ 1997 \end{bmatrix}$

1. Déterminer la solution $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

NOM: ....

2. Considérons le système perturbé $\mathbf{A}\,(\,\mathbf{x}+\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}) = \mathbf{b}+\boldsymbol{\delta}\mathbf{b}$ où $\boldsymbol{\delta}\mathbf{b} = 10^{-2}\mathbf{v}$.
   Montrer que la perturbation sur la solution, $\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}$, peut s'exprimer sous la forme

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} = \mu\mathbf{A}^{-1}\mathbf{w}$$

   où μ est un nombre réel que l'on explicitera, et $\mathbf{w}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ que l'on déterminera.

NOM: ....

3. En déduire $\|\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}\|_\infty$

NOM: ....

4. Calculer $\frac{\|\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}$

NOM: ....

5. Estimer $\dfrac{\|\boldsymbol{\delta}\mathbf{b}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty}$ sans calculer sa valeur exacte

NOM: ....

6. Quelle relation trouvez-vous entre $\dfrac{\|\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}$ et $\dfrac{\|\boldsymbol{\delta}\mathbf{b}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty}$, et pouviez-vous la prévoir au vu des résultats de la partie A .

NOM: ....

Exercice 3

Soit une matrice $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ avec $\operatorname{rang}\mathbf{X} = r \leq \min\{m, n\}$. Rappelons que la décomposition en valeurs singulières est donnée par

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{V}^{\top}$$

avec $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_r \quad \mathbf{U}_{m-r}]$, $\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_r \quad \mathbf{V}_{n-r}]$.

Considérons le système $\mathbf{X}\mathbf{a} = \mathbf{y}$. La solution des moindres carrés est calculée par

$$\widehat{\mathbf{a}} = \mathbf{V}_r\boldsymbol{\Delta}_r^{-1}\mathbf{U}_r^{\top}\mathbf{y}$$

1. Appliquer la formule précédente au système

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   et calculer le vecteur $\widehat{\mathbf{a}}$.

NOM: ....

2. Soit maintenant la matrice perturbée $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$

   (a) Calculer, en utilisant la pseudoïnverse, le vecteur $\widehat{\mathbf{a}}$ pour la matrice perturbée.

NOM: ....

(b) Évaluer, en fonction de la valeur de α, la qualité de la méthode des moindres carrés sur cet exemple.

NOM: ....

Exercice 4
Soit la matrice

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
4 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
-1 & 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -1 & 4 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 4
\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}
$$

On cherche à démontrer que la matrice est régulière (inversible). Pour la démonstration on ne doit pas faire le calcul de l'inverse, ni du déterminant. On ne doit pas, non plus, utiliser le corollaire qui affirme qu'une matrice diagonalement strictement dominante est inversible.