Analyse Numérique

Détermination de valeurs propres et valeurs singulières

Laurence Lamoulie

EISTI

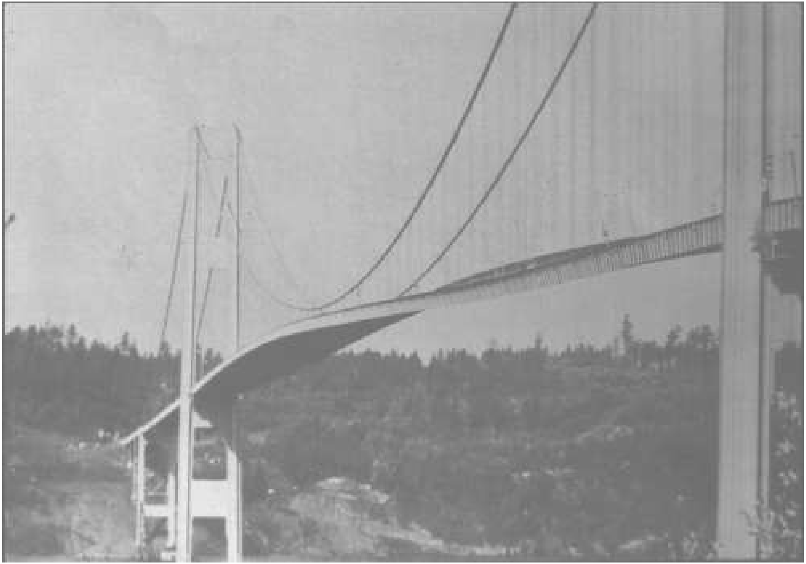
Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information

Les effets pervers des valeurs propres

Catastrophes et compagnie

- Construction parasismique en Californie : les constructions ne doivent pas entrer en résonance aux fréquences des tremblements de terre
- Aviation : oscillation des ailes aux débuts de l'aviation
- Fusée Ariane : les vibrations des moteurs de propulsion ne doivent pas résonner avec la structure
- Travaux publics
  - 1831 près de Manchester : effondrement d'un pont au passage d'un convoi militaire
  - 7-11-1940 : effondrement du pont sur le détroit de Tacoma pour un vent de 67 km/h

Les effets pervers des valeurs propres



Valeurs propres / Valeurs singulières

Définitions

Soit A matrice carrée de $\mathbb{C}^{n\times n}$.
On appelle **valeur propre (resp. vecteur propre)** tout $\lambda \in \mathbb{C}$ (resp. tout vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ non nul) vérifiant :

$$Ax = \lambda x$$

Une matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est **diagonalisable** s'il existe une matrice inversible $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telle que

$$P^{-1}AP = \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

Si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, il existe deux matrices unitaires $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ et $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telles que

$$U^*AV = \Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p) \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

où $p = min(m, n)$ et $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_p \geq 0$

Remarque fondamentale et conséquences

Parallèle entre valeurs propres et valeurs singulières

Les valeurs singulières constituent une **généralisation** de la notion de valeur propre pour les matrices rectangulaires

Conséquence

Il faut maîtriser les notions algébriques relatives aux valeurs propres si on veut comprendre leur calcul et celui des valeurs singulières

Matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Soient $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ et $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ les bases respectives de E et F.
Alors la matrice associée à l'application linéaire f est la matrice A de taille $n \times m$ vérifiant :

$$\begin{aligned} A(e_1) &= a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + \cdots + a_{n1} f_n \\ &\vdots \\ A(e_j) &= a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \cdots + a_{nj} f_n \\ &\vdots \\ A(e_m) &= a_{1m} f_1 + a_{2m} f_2 + \cdots + a_{nm} f_n \end{aligned}$$

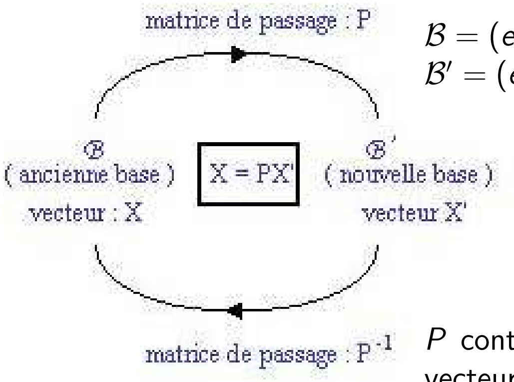
avec $a_{i,j} \in \mathbb{R}$

Matrice d'une application linéaire

Les images des vecteurs de la base de départ sont placées en colonne en fonction des vecteurs de la base d'arrivée.
Pour tout vecteur $x \in E$ exprimé dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$ par le vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, on obtient l'image $y = f(x)$ dans la base de F, notée $\mathcal{C}$ par le vecteur $A.x$.

Problème : Comment changer de base dans E et/ou dans F pour obtenir une matrice B pour l'application linéaire f qui soit plus simple que la matrice A ?

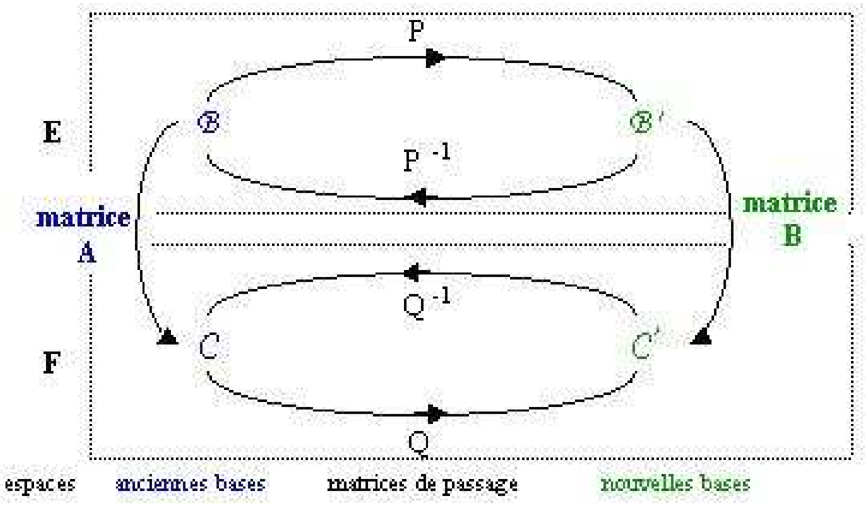
Changement de base pour x ou y



$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_m)$
$\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_m)$

P contient en colonnes les vecteurs e'_j écrits en fonction des vecteurs e_j.

Changement de base pour f : $B = Q^{-1}AP$



Principe de la projection

Soit un espace vectoriel E qui se décompose en somme directe :

$$E = F \oplus G$$

On a donc

$$\forall x \in E, \exists y \in F, \exists z \in G / \qquad x = y + z$$

Exemple : $\mathbb{R}^3 = D \oplus P$ où D est une droite et P est un plan.

Définition de la projection de E sur F

La projection de E sur F est l'application linéaire $p : E \longrightarrow F$ définie par la relation

$$p(x) = p(y + z) = y, \forall y \in F \text{ et } \forall z \in G$$

Méthodes de calcul des valeurs propres

Différentes méthodes

- Factorisation LU ou méthode de Rutishauser : toutes valeurs propres
- Méthode de Jacobi : toutes valeurs propres
- Méthode de la puissance (itérée) : plus grande valeur propre en module
- Méthode de la puissance inverse : plus petite valeur propre en module
- Méthode QR ou de Householder : Toutes valeurs propres

Pourquoi pas les racines du polynôme caractéristique ?

Exemple de Wilkinson

Considérons la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ définie par :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & n \end{bmatrix}$$ dont le polynôme caractéristique est :

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= (1-\lambda)(2-\lambda)\dots(n-\lambda) \\ &= (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots a_1\lambda + a_0 \end{aligned}$$

Même si on calcule le mieux possible les zéros de ce polynôme, on obtient à partir de $n = 10$ des résultats complètement erronés.

Principe de la méthode de la puissance

Remarque préliminaire

Dans le calcul des valeurs propres, c'est souvent les valeurs propres extrêmes qui sont intéressantes, c'est à dire celles de plus grand et de plus petit module. La méthode de la puissance calcule seulement la plus grande valeur propre.

Hypothèse nécessaire

A est une matrice carrée d'ordre n.
On doit supposer que les valeurs sont rangées :

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

c'est à dire que $|\lambda_1|$ est distinct des autres modules des valeurs propres.

Algorithme de la méthode de la puissance

Algorithme

Etant donné un vecteur initial arbitraire $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$, poser

$$y^{(0)} = \frac{x^{(0)}}{\|x^{(0)}\|}$$

puis calculer : pour $k = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= A.y^{(k-1)} \\ y^{(k)} &= \frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|} \\ \lambda^{(k)} &= \left(y^{(k)}\right)^* A y^{(k)} \end{aligned}$$

Fondement du nom de la méthode de la puissance

Récurrence

On montre facilement que

$$y^{(k)} = \beta^{(k)}.A^k.y^{(0)}$$

où pour $k \geq 1$

$$\beta^{(k)} = \left(\prod_{i=1}^{k} \|x^{(i)}\| \right)^{-1}$$

La présence des puissances de A donne son nom à la méthode.

Résultat de la méthode de la puissance

Itérés

La méthode donne une suite de vecteurs $y^{(k)}$ normés, qui s'alignent dans la direction du vecteur propre x_1.
La quantité $\lambda^{(k)}$ tend vers λ_1.
On stoppe l'algorithme à la première itération k telle que

$$\left|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\right| < \varepsilon \left|\lambda^{(k)}\right|$$

où ε est une tolérance fixée.

Utilisation de la méthode de Rutishauser

Conditions nécessaires

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice vérifiant :

- A est définie positive,

- toutes les valeurs propres de A sont non nulles, distinctes deux à deux en module et telles que :

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n| > 0$$

Principe de la méthode de Rutishauser

Utilisation de la décomposition LU de A

1. On pose $A_1 = A$
2. Pour $k = 1, \ldots,$
   - on effectue la décomposition LU de A_k : $A_k = L_k U_k$ où L_k est triangulaire inférieure à diagonale unité, et U_k est triangulaire supérieure.
   - on pose $A_{k+1} = U_k L_k$
3. On peut montrer qu'on a

$$\lim_{k \to +\infty} A_k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Algorithme de la méthode de Rutishauser

Remarques

- Il faut que les matrices A_k admettent une décomposition LU. Cette hypothèse n'est pas assurée par les conditions nécessaires.
- Toutes les matrices A_k sont semblables à A car :

$$
\begin{aligned}
A_1 &= L_1 U_1 \Rightarrow L_1 = A_1 U_1^{-1} \text{ et } U_1 = L_1^{-1} A_1 \\
A_2 &= U_1 L_1 = U_1 A_1 U_1^{-1} = L_1^{-1} A_1 L_1 \\
A_2 &= L_2 U_2 \Rightarrow L_2 = A_2 U_2^{-1} \text{ et } U_2 = L_2^{-1} A_2 \\
A_3 &= U_2 L_2 = U_2 A_2 U_2^{-1} = (U_2 U_1) A_1 (U_2 U_1)^{-1} \\
&= L_2^{-1} A_2 L_2 = (L_1 L_2)^{-1} A_1 (L_1 L_2) \\
A_k &= (U_k \cdots U_1) A_1 (U_k \cdots U_1)^{-1} \\
&= (L_1 \cdots L_k)^{-1} A_1 (L_1 \cdots L_k)
\end{aligned}
$$

Algorithme de la méthode de Rutishauser

Remarques

- On peut arrêter les itérations, par exemple, quand les éléments diagonaux des matrices A_k ne varient pratiquement plus, c'est à dire si :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \left|(A_{k+1})_{ii} - (A_k)_{ii}\right|}{\sum_{i=1}^{n} \left|(A_k)_{ii}\right|} < \epsilon$$

Théorème de Geršgorin

Définition

Soit **A** une matrice carrée d'ordre n. On associe à chaque ligne i de la matrice le disque fermé, appelé *disque (de ligne) de Geršgorin*, D_i dont le centre est l'élément diagonal a_{ii} et le rayon la somme des modules des éléments non diagonaux de la ligne:

$$D_i^{(l)} = \left\{ z \in \mathbb{C} \Big/ \mid z - a_{ii} \mid \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \mid a_{ij} \mid \right\}$$

La quantité $R_i^{(l)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \mid a_{ij} \mid$ est le rayon du disque $D_i^{(l)}$

Théorème de Geršgorin

Nous pouvons appliquer la définition des disque de Geršgorin à la transposée de la matrice **A**. On obtient ainsi les *disques (des colonnes) de Geršgorin*

Définition pour les colonnes

$$D_j^{(c)} = \left\{ z \in \mathbb{C} \Big/ \mid z - a_{jj} \mid \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \mid a_{ij} \mid \right\}$$

qui sont relatifs aux colonnes de la matrice.

Théorème de Geršgorin

Théorème

Soit **A** une matrice carrée d'ordre n.

1. Toute valeur propre λ de la matrice **A** appartient à l'un au moins de disques (des lignes) de Geršgorin, c'est-à-dire

$$\forall \lambda \in \sigma(\mathbf{A}) \;\; \exists i = 1, \ldots, n : \lambda \in D_i^{(l)}$$

   où $\sigma(\mathbf{A})$ le spectre de la matrice **A**.

2. Toute valeur propre λ de la matrice **A** appartient à l'un au moins de disques (des colonnes) de Geršgorin, c'est-à-dire

$$\forall \lambda \in \sigma(\mathbf{A}) \;\; \exists j = 1, \ldots, n : \lambda \in D_j^{(c)}$$

Théorème de Geršgorin

Propriété

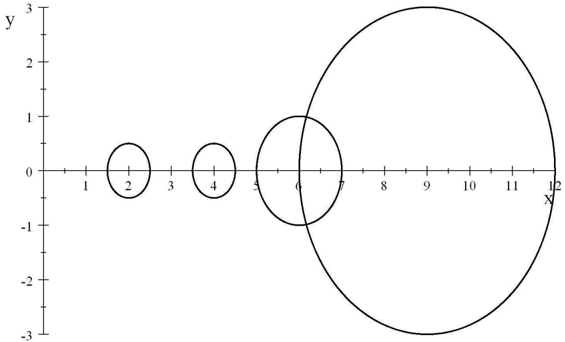
$$\sigma\left(\mathbf{A}\right) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i^{(l)}$$

Propriété

Toutes les valeurs propres d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ appartiennent à la région du plan complexe définie par l'intersection des deux régions constituées respectivement de la réunion des disques des lignes et des colonnes.
Si de plus m disques des lignes (ou des colonnes) , $1 \leq m \leq n$, sont disjoints de la réunion des $n-m$ autres disques, alors leur réunion contient exactement m valeurs propres (où pour le calcul de m il faut tenir compte de la multiplicité des valeurs propres et des disques).

Exemple

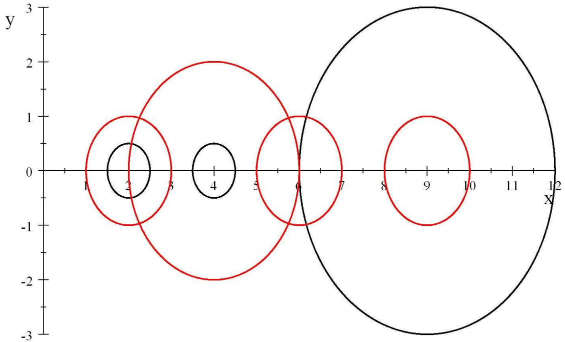
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ -1/2 & 0 & 6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$



Disques colonnes

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ -1/2 & 0 & 6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$



+ Disques lignes

Références

- *Analyse numérique*, M. Schatzman, InterEditions, 1991,
- *Matrix Computations, 3rd edition*, G.H. Golub, C.F. Van Loan, Johns Hopkins, 1996,
- *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, P.G. Ciarlet, Masson, Paris, 1982
- *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*, P. Lascaux R. Theodor, Masson, 1993.
- *Algèbre matricielle numérique*, C. Brezinski, document pdf, Chapitre 2
- *The Algebraic Eigenvalue Problem*, J.H.Wilkinson, Clarendon Press, 1965.