ANALYSE NUMÉRIQUE I

COURS 1

MÉTHODES ITÉRATIVES

Ch. Baskiotis

LAPI – EISTI

4 janvier 2009

ALGÈBRE LINÉAIRE

Méthodes directes vs méthodes itératives
La tragédie et la farce – I

Il y a toujours, <u>au moins</u> deux façons de voir le monde !

Méthodes directes vs méthodes itératives
La tragédie et la farce – I

Il y a toujours, au moins deux façons de voir le monde !

En fait, beaucoup de gens pensent uniquement en binaire et diront qu'il y ait exactement deux façons.

Méthodes directes vs méthodes itératives
La tragédie et la farce – I

Il y a toujours, au moins deux façons de voir le monde !

En fait, beaucoup de gens pensent uniquement en binaire et diront qu'il y ait exactement deux façons.

Par exemple K. Marx qui disait « que l'histoire se répète deux fois : une comme tragédie et une comme farce ».

Méthodes directes vs méthodes itératives
La tragédie et la farce – I

Il y a toujours, au moins deux façons de voir le monde !

En fait, beaucoup de gens pensent uniquement en binaire et diront qu'il y ait exactement deux façons.

Par exemple K. Marx qui disait « que l'histoire se répète deux fois : une comme tragédie et une comme farce ».

En voici un exemple, auquel certainement K. Marx n'a pas pensé, mais qui est arrivé très souvent dans le passé et arrivera encore souvent à l'avenir et jusqu'à la fin des jours.

Méthodes directes vs méthodes itératives
La tragédie et la farce – II

Prenez un morceau de musique, de piano, de clarinette, tout ce que vous voulez.

Méthodes directes vs méthodes itératives
La tragédie et la farce – II

Prenez un morceau de musique, de piano, de clarinette, tout ce que vous voulez.

Une façon de le décrire est la partition, forme écrite symbolique.

Méthodes directes vs méthodes itératives
La tragédie et la farce – II

Prenez un morceau de musique, de piano, de clarinette, tout ce que vous voulez.

Une façon de le décrire est la partition, forme écrite symbolique.

Le soliste l'a devant lui, l'exécute et, dans certains passages, il se trompe et voici la tragédie du soliste et, aussi accessoirement, de l'auditeur.

Méthodes directes vs méthodes itératives
La tragédie et la farce – II

Prenez un morceau de musique, de piano, de clarinette, tout ce que vous voulez.

Une façon de le décrire est la partition, forme écrite symbolique.

Le soliste l'a devant lui, l'exécute et, dans certains passages, il se trompe et voici la tragédie du soliste et, aussi accessoirement, de l'auditeur.

Une autre façon de décrire le morceau est le papier à musique, forme écrite aussi mais analytique.

Méthodes directes vs méthodes itératives
La tragédie et la farce – II

Prenez un morceau de musique, de piano, de clarinette, tout ce que vous voulez.

Une façon de le décrire est la partition, forme écrite symbolique.

Le soliste l'a devant lui, l'exécute et, dans certains passages, il se trompe et voici la tragédie du soliste et, aussi accessoirement, de l'auditeur.

Une autre façon de décrire le morceau est le papier à musique, forme écrite aussi mais analytique.

Le joueur de l'orgue tourne inlassablement la manivelle et produit de la musique mécanique, sans état d'âme et voici le côté farce.

Méthodes directes vs méthodes itératives
La tragédie et la farce – III

Plus près de nous, en analyse numérique, pour résoudre un problème $\mathbf{P}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on hésite toujours entre

– ***méthodes directes***

Méthodes directes vs méthodes itératives
La tragédie et la farce – III

Plus près de nous, en analyse numérique, pour résoudre un problème $\mathbf{P}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on hésite toujours entre

- ***méthodes directes*** issues des théories mathématiques, souvent très élaborées, et qui s'appliquent au problème $\mathbf{P}(\mathbf{x})$

Méthodes directes vs méthodes itératives
La tragédie et la farce – III

Plus près de nous, en analyse numérique, pour résoudre un problème $\mathbf{P}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on hésite toujours entre

- ***méthodes directes*** issues des théories mathématiques, souvent très élaborées, et qui s'appliquent au problème $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ et
- ***méthodes itératives***

Méthodes directes vs méthodes itératives
La tragédie et la farce – III

Plus près de nous, en analyse numérique, pour résoudre un problème $\mathbf{P}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on hésite toujours entre

– ***méthodes directes*** issues des théories mathématiques, souvent très élaborées, et qui s'appliquent au problème $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ et
– ***méthodes itératives*** qui construisent un algorithme itératif $A(\mathbf{x})$ qui, en utilisant la force de calcul des ordinateurs, fournit la solution $\mathbf{x}^*$ du problème.

Méthodes directes vs méthodes itératives
La tragédie et la farce – III

Plus près de nous, en analyse numérique, pour résoudre un problème $\mathbf{P}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on hésite toujours entre

- ***méthodes directes*** issues des théories mathématiques, souvent très élaborées, et qui s'appliquent au problème $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ et
- ***méthodes itératives*** qui construisent un algorithme itératif $A(\mathbf{x})$ qui, en utilisant la force de calcul des ordinateurs, fournit la solution $\mathbf{x}^*$ du problème.

Leur substrat mathématique est

- l'optimisation – on cherche un $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathbf{P}(\mathbf{x}^*) = optimal$, c-à-d soit minimal, soit maximal,

Méthodes directes vs méthodes itératives
La tragédie et la farce – III

Plus près de nous, en analyse numérique, pour résoudre un problème $\mathbf{P}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on hésite toujours entre

- ***méthodes directes*** issues des théories mathématiques, souvent très élaborées, et qui s'appliquent au problème $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ et
- ***méthodes itératives*** qui construisent un algorithme itératif $A(\mathbf{x})$ qui, en utilisant la force de calcul des ordinateurs, fournit la solution $\mathbf{x}^*$ du problème.

Leur substrat mathématique est

- l'optimisation – on cherche un $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathbf{P}(\mathbf{x}^*) = optimal$, c-à-d soit minimal, soit maximal, et
- le point fixe – on cherche un $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathbf{x}^* = A(\mathbf{x}^*)$.

Méthodes directes vs méthodes itératives
La tragédie et la farce – III

Plus près de nous, en analyse numérique, pour résoudre un problème $\mathbf{P}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on hésite toujours entre

- ***méthodes directes*** issues des théories mathématiques, souvent très élaborées, et qui s'appliquent au problème $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ et
- ***méthodes itératives*** qui construisent un algorithme itératif $A(\mathbf{x})$ qui, en utilisant la force de calcul des ordinateurs, fournit la solution $\mathbf{x}^*$ du problème.

Leur substrat mathématique est

- l'optimisation – on cherche un $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathbf{P}(\mathbf{x}^*) = optimal$, c-à-d soit minimal, soit maximal, et
- le point fixe – on cherche un $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathbf{x}^* = A(\mathbf{x}^*)$.

  Ces méthodes peuvent s'appliquer à tout problème mathématique pour lequel on peut construire un algorithme A.

Méthodes directes vs méthodes itératives
La tragédie et la farce – IV

Avantage des méthodes directes : On connaît d'avance le volume des calculs, donc le temps qu'il faudra pour obtenir la solution.

Méthodes directes vs méthodes itératives
La tragédie et la farce – IV

Avantage des méthodes directes : On connaît d'avance le volume des calculs, donc le temps qu'il faudra pour obtenir la solution.

$\Longrightarrow$ Mais quelle solution !

Méthodes directes vs méthodes itératives
La tragédie et la farce – IV

Avantage des méthodes directes : On connaît d'avance le volume des calculs, donc le temps qu'il faudra pour obtenir la solution.

$\Rightarrow$ Mais quelle solution ! Si la matrice est mal conditionnée, la solution est numériquement très mauvaise, voire inacceptable.

Méthodes directes vs méthodes itératives
La tragédie et la farce – IV

Avantage des méthodes directes : On connaît d'avance le volume des calculs, donc le temps qu'il faudra pour obtenir la solution.

$\Rightarrow$ Mais quelle solution ! Si la matrice est mal conditionnée, la solution est numériquement très mauvaise, voire inacceptable.

$\Rightarrow$ La tragédie de l'application des théories mathématiques en analyse numérique.

Méthodes directes vs méthodes itératives
La tragédie et la farce – V

Avantage des méthodes itératives : Fournissent (presque) toujours une solution acceptable.

Méthodes directes vs méthodes itératives
La tragédie et la farce – V

Avantage des méthodes itératives : Fournissent (presque) toujours une solution acceptable.

Mais dans combien de temps ?

Méthodes directes vs méthodes itératives
La tragédie et la farce – V

Avantage des méthodes itératives : Fournissent (presque) toujours une solution acceptable.

Mais dans combien de temps ? Comme les marins de l'antiquité, on fabrique un bateau-algorithme ad hoc et on part à la recherche d'une terre ferme-point fixe de cet algorithme. Si les dieux sont cléments, si les vents sont favorables, viendra un jour où on apercevra la terre-solution.

Méthodes directes vs méthodes itératives
La tragédie et la farce – V

Avantage des méthodes itératives : Fournissent (presque) toujours une solution acceptable.

Mais dans combien de temps ? Comme les marins de l'antiquité, on fabrique un bateau-algorithme ad hoc et on part à la recherche d'une terre ferme-point fixe de cet algorithme. Si les dieux sont cléments, si les vents sont favorables, viendra un jour où on apercevra la terre-solution.

La farce de la débrouillardise mathématique appliquée à l'analyse numérique.

Méthodes directes vs méthodes itératives
La tragédie et la farce – V

Avantage des méthodes itératives : Fournissent (presque) toujours une solution acceptable.

Mais dans combien de temps ? Comme les marins de l'antiquité, on fabrique un bateau-algorithme ad hoc et on part à la recherche d'une terre ferme-point fixe de cet algorithme. Si les dieux sont cléments, si les vents sont favorables, viendra un jour où on apercevra la terre-solution.

La farce de la débrouillardise mathématique appliquée à l'analyse numérique.

N.B. Les maths appliquées d'aujourd'hui sont plutôt farce. Mais quelle farce jubilatoire et féconde. Pensez-y : Algorithmes génétiques, méthodes évolutionnaires, réseaux des neurones, boosting, machines à support vectoriel, etc.

Principe de la méthode itérative appliquée à la solution d'un système linéaire – I

Soit le système linéaire

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Le principe d'une méthode itérative pour trouver la solution de ce système est le suivant :

1. On choisit au hasard un vecteur $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

Principe de la méthode itérative appliquée à la solution d'un système linéaire – I

Soit le système linéaire

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Le principe d'une méthode itérative pour trouver la solution de ce système est le suivant :

1. On choisit au hasard un vecteur $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$
2. À l'aide d'un algorithme ad hoc, on construit une suite des vecteurs $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ qui converge vers la solution $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ du système :

$$\mathbf{x}^* = \lim_{k \to \infty} \mathbf{x}_k$$

Principe de la méthode itérative appliquée à la solution d'un système linéaire – I

Soit le système linéaire

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Le principe d'une méthode itérative pour trouver la solution de ce système est le suivant :

1. On choisit au hasard un vecteur $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$
2. À l'aide d'un algorithme ad hoc, on construit une suite des vecteurs $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ qui converge vers la solution $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ du système :

$$\mathbf{x}^* = \lim_{k \to \infty} \mathbf{x}_k$$

Dans ce cas le vecteur $\mathbf{x}^*$ est un point fixe de l'algorithme.

Principe de la méthode itérative appliquée à la solution d'un système linéaire – II

Pour construire l'algorithme ad hoc dans le cas de la solution d'un système linéaire, on procède comme suit :

Principe de la méthode itérative appliquée à la solution d'un système linéaire – II

Pour construire l'algorithme ad hoc dans le cas de la solution d'un système linéaire, on procède comme suit :

1. On décompose la matrice $\mathbf{A}$ en deux matrices

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$$

où $\mathbf{M}$ matrice régulière.

Principe de la méthode itérative appliquée à la solution d'un système linéaire – II

Pour construire l'algorithme ad hoc dans le cas de la solution d'un système linéaire, on procède comme suit :

1. On décompose la matrice $\mathbf{A}$ en deux matrices

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$$

   où $\mathbf{M}$ matrice régulière.

2. L'itération est donnée par la formule

$$\mathbf{M}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{N}\mathbf{x}_k + \mathbf{b};\ k \geq 0$$

Principe de la méthode itérative appliquée à la solution d'un système linéaire – III

L'itération peut aussi se mettre sous la forme

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_k + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b};\ k \geq 0$$

La matrice $\mathbf{G} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$ est la *matrice d'itération de la méthode*.

Principe de la méthode itérative appliquée à la solution d'un système linéaire – III

L'itération peut aussi se mettre sous la forme

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_k + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b};\ k \geq 0$$

La matrice $\mathbf{G} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$ est la *matrice d'itération de la méthode*.

L'erreur de la k-ième itération, par rapport à la vraie solution $\mathbf{x}^*$ est

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^*$$

On peut démontrer (cf. poly, p.61) que cette erreur tend vers zéro, si $\|\mathbf{G} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\| < 1$

Méthodes itératives simples – I

Les différentes méthodes itératives se distinguent par la façon dont se fait la décomposition $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$.

Méthodes itératives simples – I

Les différentes méthodes itératives se distinguent par la façon dont se fait la décomposition $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$.

Il faut que $\mathbf{M}$ soit inversible et, de plus, facile à inverser.

Jacobi Première idée : $\mathbf{M}$ matrice diagonale.

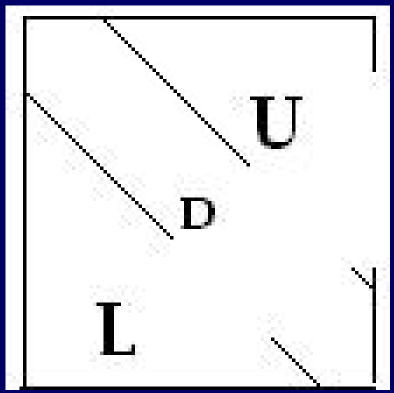
Méthodes itératives simples – I

Les différentes méthodes itératives se distinguent par la façon dont se fait la décomposition $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$.

Il faut que $\mathbf{M}$ soit inversible et, de plus, facile à inverser.

Jacobi Première idée : $\mathbf{M}$ matrice diagonale.

On pose $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$



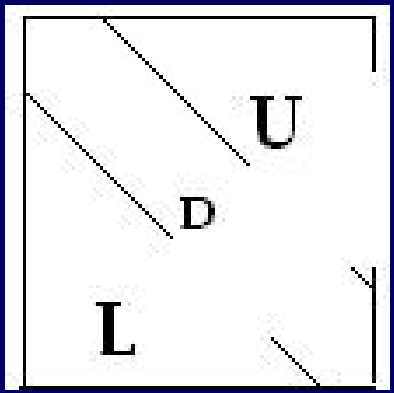
Méthodes itératives simples – I

Les différentes méthodes itératives se distinguent par la façon dont se fait la décomposition $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$.

Il faut que $\mathbf{M}$ soit inversible et, de plus, facile à inverser.

Jacobi Première idée : $\mathbf{M}$ matrice diagonale.

On pose $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$



Alors : $\mathbf{M} = \mathbf{D}$, $\mathbf{N} = -(\mathbf{L} + \mathbf{U})$ et la méthode itérative devient

$$\mathbf{x}\,(0) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x}_{k+1} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}_k + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b};\ k \geq 0$$

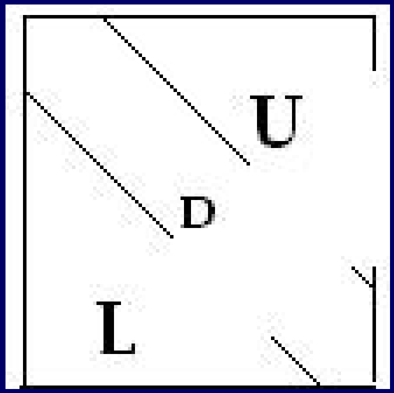
Méthodes itératives simples – I

Les différentes méthodes itératives se distinguent par la façon dont se fait la décomposition $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$.

Il faut que $\mathbf{M}$ soit inversible et, de plus, facile à inverser.

Jacobi Première idée : $\mathbf{M}$ matrice diagonale.

On pose $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$



Alors : $\mathbf{M} = \mathbf{D},\ \mathbf{N} = -(\mathbf{L} + \mathbf{U})$ et la méthode itérative devient

$$\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x}_{k+1} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}_k + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b};\ k \geq 0$$

ou encore
$$x_i(k+1) = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1 j\neq i}^{n} a_{ij}x_j(k)\right);\ i = 1, \ldots, n$$

Méthodes itératives simples – II

Gauss-Seidel Deuxième idée : $\mathbf{M}$ matrice triangulaire inférieure.

Méthodes itératives simples – II

Gauss-Seidel Deuxième idée : $\mathbf{M}$ matrice triangulaire inférieure.
On pose $\mathbf{M} = \mathbf{L} + \mathbf{D}$, $\mathbf{N} = -\mathbf{U}$ et la méthode itérative devient

$$\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x}(k+1) = -(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x}(k) + (\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}$$

Méthodes itératives simples – II

Gauss-Seidel Deuxième idée : $\mathbf{M}$ matrice triangulaire inférieure.
On pose $\mathbf{M} = \mathbf{L} + \mathbf{D},\ \mathbf{N} = -\mathbf{U}$ et la méthode itérative devient

$$\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x}(k+1) = -(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\mathbf{x}(k) + (\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}$$

ou, encore

$$x_i(k+1) = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j(k+1) - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j(k)\right);\ i = 1,\ldots,n$$

Méthodes itératives simples – III

Richardson Troisième idée : $\mathbf{M}$ matrice identité.

On pose

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} \quad et \quad \mathbf{N} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$$

Méthodes itératives simples – III

Richardson Troisième idée : $\mathbf{M}$ matrice identité.

On pose

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} \quad et \quad \mathbf{N} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$$

et la méthode itérative devient

$$\mathbf{x}\,(0) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x}\,(k+1) = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{x}\,(k) + \mathbf{b};\ i = 1, \ldots, n$$

Convergence

Jacobi La méthode converge

– si $\|\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\| < 1$,

Convergence

Jacobi La méthode converge

- si $\|\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\| < 1$, ou
- si la matrice $\mathbf{A}$ est à diagonale dominante stricte, c-à-d $|a_{ii}| > |\sum_{j=1}^{n}|$; $i = 1, \ldots, n$.

Convergence

Jacobi La méthode converge

- si $\|\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\| < 1$, ou
- si la matrice $\mathbf{A}$ est à diagonale dominante stricte, c-à-d $|a_{ii}| > |\sum_{j=1}^{n}|$; $i = 1, \ldots, n$.

Gauss-Seidel La méthode converge

- si $\|(\mathbf{D}^{-1}+\mathbf{L})\mathbf{U})\| < 1$,

Convergence

Jacobi La méthode converge

- si $\|\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\| < 1$, ou
- si la matrice $\mathbf{A}$ est à diagonale dominante stricte, c-à-d $|a_{ii}| > |\sum_{j=1}^{n}|$; $i = 1, \ldots, n$.

Gauss-Seidel La méthode converge

- si $\|(\mathbf{D^{-1}}+\mathbf{L})\mathbf{U})\| < 1$, ou
- si la matrice $\mathbf{A}$ est à diagonale dominante stricte, c-à-d $|a_{ii}| > |\sum_{j=1}^{n}|$; $i = 1, \ldots, n$, ou
- si $\mathbf{A}$ es une matrice symétrique, définie positive.

Convergence

Jacobi La méthode converge

- si $\|\mathbf{D^{-1}}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\| < 1$, ou
- si la matrice $\mathbf{A}$ est à diagonale dominante stricte, c-à-d $|a_{ii}| > |\sum_{j=1}^{n}|$; $i = 1, \ldots, n$.

Gauss-Seidel La méthode converge

- si $\|(\mathbf{D^{-1}}+\mathbf{L})\mathbf{U})\| < 1$, ou
- si la matrice $\mathbf{A}$ est à diagonale dominante stricte, c-à-d $|a_{ii}| > |\sum_{j=1}^{n}|$; $i = 1, \ldots, n$, ou
- si $\mathbf{A}$ es une matrice symétrique, définie positive.

Richardson La méthode converge si $\mathbf{I} - \mathbf{A} < 1$.

La relaxation

Dans les trois méthodes itératives, à l' itération $(k+1)$, on calcule la valeur de $\mathbf{x}(k+1)$ sans tenir compte de la valeur de $\mathbf{x}(k)$. Or, en paraphrasant Satie, on peut dire que « dans la vie, il faut être sérieux. Si on est fou, il faut être un fou sérieux ».

La relaxation

Dans les trois méthodes itératives, à l' itération $(k+1)$, on calcule la valeur de $\mathbf{x}(k+1)$ sans tenir compte de la valeur de $\mathbf{x}(k)$. Or, en paraphrasant Satie, on peut dire que « dans la vie, il faut être sérieux. Si on est fou, il faut être un fou sérieux ».
Pourquoi donc ne pas tenir compte, pour le calcul de $\mathbf{x}(k+1)$ de la valeur de $\mathbf{x}(k)$?

La relaxation

Dans les trois méthodes itératives, à l' itération $(k+1)$, on calcule la valeur de $\mathbf{x}(k+1)$ sans tenir compte de la valeur de $\mathbf{x}(k)$. Or, en paraphrasant Satie, on peut dire que « dans la vie, il faut être sérieux. Si on est fou, il faut être un fou sérieux ».
Pourquoi donc ne pas tenir compte, pour le calcul de $\mathbf{x}(k+1)$ de la valeur de $\mathbf{x}(k)$?
On relaxe la valeur calculée de $\mathbf{x}(k+1)$ en la pondérant avec un coefficient $\mu \in]0,2[$ et on pondère avec le complément $1-\mu$ le vecteur $\mathbf{x}(k)$ et on espère ainsi réduire le nombre d'itérations.

La relaxation

Dans les trois méthodes itératives, à l' itération $(k+1)$, on calcule la valeur de $\mathbf{x}(k+1)$ sans tenir compte de la valeur de $\mathbf{x}(k)$. Or, en paraphrasant Satie, on peut dire que « dans la vie, il faut être sérieux. Si on est fou, il faut être un fou sérieux ».
Pourquoi donc ne pas tenir compte, pour le calcul de $\mathbf{x}(k+1)$ de la valeur de $\mathbf{x}(k)$?
On relaxe la valeur calculée de $\mathbf{x}(k+1)$ en la pondérant avec un coefficient $\mu \in]0,2[$ et on pondère avec le complément $1-\mu$ le vecteur $\mathbf{x}(k)$ et on espère ainsi réduire le nombre d'itérations.
μ est appelé ***coefficient de relaxation***.

La relaxation

Dans les trois méthodes itératives, à l' itération $(k+1)$, on calcule la valeur de $\mathbf{x}(k+1)$ sans tenir compte de la valeur de $\mathbf{x}(k)$. Or, en paraphrasant Satie, on peut dire que « dans la vie, il faut être sérieux. Si on est fou, il faut être un fou sérieux ».

Pourquoi donc ne pas tenir compte, pour le calcul de $\mathbf{x}(k+1)$ de la valeur de $\mathbf{x}(k)$?

On relaxe la valeur calculée de $\mathbf{x}(k+1)$ en la pondérant avec un coefficient $\mu \in]0,2[$ et on pondère avec le complément $1-\mu$ le vecteur $\mathbf{x}(k)$ et on espère ainsi réduire le nombre d'itérations.

μ est appelé ***coefficient de relaxation***.

On ne connaît pas grand chose pour la valeur optimale de μ. On revient donc au fait que si les dieux sont ... (cf. supra), alors on arrivera vite sur terre ferme. Sinon... on sombrera dans les courants pélagiques de la relaxation.

Jacobi relaxé

Schéma itératif

$$\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x}(k+1) = (1-\mu)\,\mathbf{x}(k) - \mu\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\,\mathbf{x}(k) + \mu\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

avec $\mu \in \,]0,2[$ le *coefficient de relaxation*. Si $\mu < 1$ nous avons une ***sous-relaxation*** et si $\mu > 1$ nous avons une ***sur-relaxation***.

Pour $\mu = 1$ nous avons le schéma de Jacobi non relaxé.

Gauss-Seidel relaxé

Schéma itératif

$$\mathbf{x}(k+1) = \left(\mathbf{I} + \mu\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L}\right)^{-1}\left[(1-\mu)\,\mathbf{I} - \mu\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}\right]\mathbf{x}(k) + \mu\left(\mathbf{I} + \mu\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L}\right)^{-1}\mathbf{b}$$

qui peut encore s'écrire

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{D} + \mu\mathbf{L})^{-1}\left[(1-\mu)\,\mathbf{D} - \mu\mathbf{U}\right]\mathbf{x}(k) + \mu(\mathbf{D} + \mu\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}$$

Si $\mu > 1$ la méthode relaxée de Gauss-Seidel s'appelle aussi ***successive overrelaxation*** (SOR).

Richardson relaxé

Schéma itératif

$$\mathbf{x}\left(k+1\right) = (1-\mu)\mathbf{x}\left(k\right) - \mu\left(\mathbf{A}\mathbf{x}\left(k\right) - \mathbf{b}\right)$$

Convergece des méthodes relaxées

Jacobi Si la méthode itérative de Jacobi converge, alors la méthode itérative relaxée de Jacobi converge pour $0 < \mu \leq 1$.

Convergece des méthodes relaxées

Jacobi Si la méthode itérative de Jacobi converge, alors la méthode itérative relaxée de Jacobi converge pour $0 < \mu \leq 1$.

Gauss-Seidel Si $\mathbf{A}$ matrice symétrique et définie positive, alors la méthode de Gauss-Seidel converge si $0 < \mu < 2$.

Méthode du gradient

Considérons les résidus des itérations d'une méthode itérative, à savoir les quantités

$$\mathbf{r}\,(k) = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\,(k)$$

Méthode du gradient

Considérons les résidus des itérations d'une méthode itérative, à savoir les quantités

$$\mathbf{r}\,(k) = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\,(k)$$

Alors, en utilisant la decomposition $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ on obtient :

$$\mathbf{r}\,(k) = \mathbf{b} - (\mathbf{M} - \mathbf{N})\mathbf{x}\,(k) = \mathbf{b} + \mathbf{N}\mathbf{x}\,(k) - \mathbf{M}\mathbf{x}\,(k)$$

Méthode du gradient

Considérons les résidus des itérations d'une méthode itérative, à savoir les quantités

$$\mathbf{r}\,(k) = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\,(k)$$

Alors, en utilisant la decomposition $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ on obtient :

$$\mathbf{r}\,(k) = \mathbf{b} - (\mathbf{M} - \mathbf{N})\mathbf{x}\,(k) = \mathbf{b} + \mathbf{N}\mathbf{x}\,(k) - \mathbf{M}\mathbf{x}\,(k)$$

et comme $\mathbf{M}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{N}\mathbf{x}_k + \mathbf{b};\ k \geq 0$, on a

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{M}\,(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) =;\ k \geq 0$$

Méthode du gradient

Considérons les résidus des itérations d'une méthode itérative, à savoir les quantités

$$\mathbf{r}\,(k) = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\,(k)$$

Alors, en utilisant la decomposition $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ on obtient :

$$\mathbf{r}\,(k) = \mathbf{b} - (\mathbf{M} - \mathbf{N})\mathbf{x}\,(k) = \mathbf{b} + \mathbf{N}\mathbf{x}\,(k) - \mathbf{M}\mathbf{x}\,(k)$$

et comme $\mathbf{M}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{N}\mathbf{x}_k + \mathbf{b};\ k \geq 0$, on a

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{M}\left(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\right) =;\ k \geq 0$$

qu'on écrit encore

$$\mathbf{M}\left(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\right) = \alpha_k \mathbf{r}_k;\ k \geq 0$$

avec α_k paramètre à choisir pour accélérer la convergence.

Méthode du gradient

Considérons les résidus des itérations d'une méthode itérative, à savoir les quantités

$$\mathbf{r}\,(k) = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\,(k)$$

Alors, en utilisant la decomposition $\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N}$ on obtient :

$$\mathbf{r}\,(k) = \mathbf{b} - (\mathbf{M} - \mathbf{N})\mathbf{x}\,(k) = \mathbf{b} + \mathbf{N}\mathbf{x}\,(k) - \mathbf{M}\mathbf{x}\,(k)$$

et comme $\mathbf{M}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{N}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}$; $k \geq 0$, on a

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{M}\left(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\right) =;\ k \geq 0$$

qu'on écrit encore

$$\mathbf{M}\left(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\right) = \alpha_k \mathbf{r}_k;\ k \geq 0$$

avec α_k paramètre à choisir pour accélérer la convergence.

Cette formule est ***la méthode du gradient***.

Résumé de la méthode du gradient

1. On choisit un vecteur $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ au hasard et on calcule $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$

Résumé de la méthode du gradient

1. On choisit un vecteur $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ au hasard et on calcule $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$
2. Pour $k = 0, 1, \ldots$ on calcule successivement
   (a) $\mathbf{M}\mathbf{z}_k = \mathbf{r}_k$

Résumé de la méthode du gradient

1. On choisit un vecteur $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ au hasard et on calcule $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$
2. Pour $k = 0, 1, \ldots$ on calcule successivement
   (a) $\mathbf{M}\mathbf{z}_k = \mathbf{r}_k$
   (b) $\alpha_k = \dfrac{\|\mathbf{r}_k, \mathbf{z}_k\|}{\|\mathbf{A}\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k\|}$

Résumé de la méthode du gradient

1. On choisit un vecteur $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ au hasard et on calcule $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$
2. Pour $k = 0, 1, \ldots$ on calcule successivement
   (a) $\mathbf{M}\mathbf{z}_k = \mathbf{r}_k$
   (b) $\alpha_k = \dfrac{\|\mathbf{r}_k, \mathbf{z}_k\|}{\|\mathbf{A}\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k\|}$
   (c) $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{z}_k$

Résumé de la méthode du gradient

1. On choisit un vecteur $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ au hasard et on calcule $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$
2. Pour $k = 0, 1, \ldots$ on calcule successivement
   (a) $\mathbf{M}\mathbf{z}_k = \mathbf{r}_k$
   (b) $\alpha_k = \dfrac{\|\mathbf{r}_k, \mathbf{z}_k\|}{\|\mathbf{A}\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k\|}$
   (c) $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{z}_k$
   (d) $\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \mathbf{A}\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k$

LABORATOIRE EISTI LAπPI EN PROCESSUS INTELLIGENTS

Généalogie de l'appelation – I

Considérons le système linéaire

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

avec $\mathbf{A}$ matrice symétrique et soit la fonctionnelle $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \mathbf{b}\right)$$

Généalogie de l'appelation – I

Considérons le système linéaire

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

avec $\mathbf{A}$ matrice symétrique et soit la fonctionnelle $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{x}^\top\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^\top\mathbf{b}\right)$$

Le gradient de cette fonctionnelle est

$$\nabla\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^\top + \mathbf{A}\right)\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$$

Généalogie de l'appelation – I

Considérons le système linéaire

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

avec $\mathbf{A}$ matrice symétrique et soit la fonctionnelle $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \mathbf{b}\right)$$

Le gradient de cette fonctionnelle est

$$\nabla\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^\top + \mathbf{A}\right)\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$$

d'où

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x})$$

Généalogie de l'appelation – II

Par conséquent

– si $\nabla\phi(\mathbf{x}) = 0$, alors $\mathbf{x}$ est solution du système linéaire,

Généalogie de l'appelation – II

Par conséquent

- si $\nabla\phi(\mathbf{x}) = 0$, alors $\mathbf{x}$ est solution du système linéaire, et
- si $\mathbf{x}$ est solution du système linéaire, alors il minimise la fonctionnelle $\nabla\phi(\mathbf{x})$.

Généalogie de l'appelation – II

Par conséquent

- si $\nabla\phi(\mathbf{x}) = 0$, alors $\mathbf{x}$ est solution du système linéaire, et
- si $\mathbf{x}$ est solution du système linéaire, alors il minimise la fonctionnelle $\nabla\phi(\mathbf{x})$.

En effet, on a

$$\nabla\phi(\mathbf{x}_k) = -\mathbf{r}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{b}$$

Généalogie de l'appelation – II

Par conséquent

- si $\nabla\phi(\mathbf{x}) = 0$, alors $\mathbf{x}$ est solution du système linéaire, et
- si $\mathbf{x}$ est solution du système linéaire, alors il minimise la fonctionnelle $\nabla\phi(\mathbf{x})$.

En effet, on a

$$\nabla\phi(\mathbf{x}_k) = -\mathbf{r}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{b}$$

et donc on calcule

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$$

où par $\mathbf{d}_k$ on indique la direction de la pente maximale du gradient $\nabla\phi(\mathbf{x}_k)$.

Comparaison des méthodes

Résultats en utilisant le système

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Méthode	**Nb. Itérations**	**Erreur résidu**
Jacobi	20	10^{-7}
Gauss-Seidel	20	10^{-14}
SOR	18	10^{-14}
Gradient	13	10^{-14}

Un exercice pour la route – I

Exercice 3.2 du poly.- Soit le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ avec $\mathbf{A}$ matrice régulière. On applique la méthode itérative de Jacobi.

1. Montrer qu'il existe un scalaire $C \in \mathbb{R}$ tel que
$$\|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}\| \leq C\,\|\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}\|$$
et évaluer sa valeur.

Un exercice pour la route – I

Exercice 3.2 du poly.- Soit le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ avec $\mathbf{A}$ matrice régulière. On applique la méthode itérative de Jacobi.

1. Montrer qu'il existe un scalaire $C \in \mathbb{R}$ tel que
$$\|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}\| \leq C \|\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}\|$$
et évaluer sa valeur.

$$\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x} \quad = \quad -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{x}$$

Un exercice pour la route – I

Exercice 3.2 du poly.- Soit le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ avec $\mathbf{A}$ matrice régulière. On applique la méthode itérative de Jacobi.

1. Montrer qu'il existe un scalaire $C \in \mathbb{R}$ tel que
$$\|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}\| \leq C \|\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}\|$$
et évaluer sa valeur.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{x} \\ &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x} \end{aligned}$$

Un exercice pour la route – I

Exercice 3.2 du poly.- Soit le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ avec $\mathbf{A}$ matrice régulière. On applique la méthode itérative de Jacobi.

1. Montrer qu'il existe un scalaire $C \in \mathbb{R}$ tel que
$$\|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}\| \leq C \|\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}\|$$
et évaluer sa valeur.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{x} \\
&= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x} \\
&= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}+\mathbf{D})\mathbf{x} - \mathbf{x}
\end{aligned}$$

Un exercice pour la route – I

Exercice 3.2 du poly.- Soit le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ avec $\mathbf{A}$ matrice régulière. On applique la méthode itérative de Jacobi.

1. Montrer qu'il existe un scalaire $C \in \mathbb{R}$ tel que
$$\|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}\| \leq C \|\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}\|$$
et évaluer sa valeur.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{x} \\
&= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{Ax} - \mathbf{x} \\
&= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}+\mathbf{D})\mathbf{x} - \mathbf{x} \\
&= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\,(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x})
\end{aligned}$$

Un exercice pour la route – I

Exercice 3.2 du poly.- Soit le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ avec $\mathbf{A}$ matrice régulière. On applique la méthode itérative de Jacobi.

1. Montrer qu'il existe un scalaire $C \in \mathbb{R}$ tel que

   $$\|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}\| \leq C\,\|\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}\|$$

   et évaluer sa valeur.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{x} \\
&= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x} \\
&= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}+\mathbf{D})\mathbf{x} - \mathbf{x} \\
&= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\,(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x})
\end{aligned}$$

d'où

$$\|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}\| \leq \left\|\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\right\| \cdot \|\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}\|$$

Un exercice pour la route – I

Exercice 3.2 du poly.- Soit le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ avec $\mathbf{A}$ matrice régulière. On applique la méthode itérative de Jacobi.

1. Montrer qu'il existe un scalaire $C \in \mathbb{R}$ tel que
$$\|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}\| \leq C \|\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}\|$$
et évaluer sa valeur.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x} &= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{x} \\
&= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x} \\
&= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U}+\mathbf{D})\mathbf{x} - \mathbf{x} \\
&= -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x})
\end{aligned}$$

d'où
$$\|\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}\| \leq \left\|\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\right\| \cdot \|\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}\|$$
avec $C = \left\|\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})\right\|$.

Un exercice pour la route – II

2. Montrer que

$$\|\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}\| \leq \frac{C^k}{1-C} \|\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}(0)\|$$

Un exercice pour la route – II

2. Montrer que

$$\|\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}\| \leq \frac{C^k}{1-C} \|\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}(0)\|$$

On utilise le résultat précédent et on a, d'une part

$$\|\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}\| = C \|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}\|$$

Un exercice pour la route – II

2. Montrer que

$$\|\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}\| \leq \frac{C^k}{1-C} \|\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}(0)\|$$

On utilise le résultat précédent et on a, d'une part

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}\| &= C \|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}\| \\ &= \|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(1) + \mathbf{x}(1) - \mathbf{x}\| \end{aligned}$$

Un exercice pour la route – II

2. Montrer que

$$\|\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}\| \leq \frac{C^k}{1-C} \|\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}(0)\|$$

On utilise le résultat précédent et on a, d'une part

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}\| &= C\,\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}\| \\ &= \|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(1) + \mathbf{x}(1) - \mathbf{x}\| \\ &\leq C\,\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(1)\| + C\,\|\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}\| \end{aligned}$$

Un exercice pour la route – II

2. Montrer que

$$\|\mathbf{x}(k)-\mathbf{x}\| \leq \frac{C^k}{1-C}\|\mathbf{x}(1)-\mathbf{x}(0)\|$$

On utilise le résultat précédent et on a, d'une part

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}(1)-\mathbf{x}\| &= C\|\mathbf{x}(0)-\mathbf{x}\| \\ &= \|\mathbf{x}(0)-\mathbf{x}(1)+\mathbf{x}(1)-\mathbf{x}\| \\ &\leq C\|\mathbf{x}(0)-\mathbf{x}(1)\|+C\|\mathbf{x}(1)-\mathbf{x}\|\end{aligned}$$

ce qui donne $\|\mathbf{x}(1)-\mathbf{x}\| = \frac{C}{1-C}\|\mathbf{x}(0)-\mathbf{x}(1)\|$

Un exercice pour la route – II

2. Montrer que

$$\|\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}\| \leq \frac{C^k}{1-C} \|\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}(0)\|$$

On utilise le résultat précédent et on a, d'une part

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}\| &= C \|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}\| \\
&= \|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(1) + \mathbf{x}(1) - \mathbf{x}\| \\
&\leq C \|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(1)\| + C \|\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}\|
\end{aligned}$$

ce qui donne $\|\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}\| = \frac{C}{1-C} \|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(1)\|$

et, d'autre part,

$$\|\mathbf{x}(2) - \mathbf{x}\| \leq C \|\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}\|$$

Un exercice pour la route – II

2. Montrer que
$$\|\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}\| \leq \frac{C^k}{1-C} \|\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}(0)\|$$
On utilise le résultat précédent et on a, d'une part

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}\| &= C\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}\| \\ &= \|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(1) + \mathbf{x}(1) - \mathbf{x}\| \\ &\leq C\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(1)\| + C\|\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}\| \end{aligned}$$

ce qui donne $\|\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}\| = \frac{C}{1-C} \|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(1)\|$

et, d'autre part,

$$\begin{array}{lll} \|\mathbf{x}(2) - \mathbf{x}\| & \leq C\|\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}\| & \\ \|\mathbf{x}(3) - \mathbf{x}\| & \leq C\|\mathbf{x}(2) - \mathbf{x}\| & \leq C^2 C\|\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}\| \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Un exercice pour la route – II

2. Montrer que
$$\|\mathbf{x}(k)-\mathbf{x}\| \leq \frac{C^k}{1-C}\|\mathbf{x}(1)-\mathbf{x}(0)\|$$
On utilise le résultat précédent et on a, d'une part
$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}(1)-\mathbf{x}\| &= C\|\mathbf{x}(0)-\mathbf{x}\| \\ &= \|\mathbf{x}(0)-\mathbf{x}(1)+\mathbf{x}(1)-\mathbf{x}\| \\ &\leq C\|\mathbf{x}(0)-\mathbf{x}(1)\|+C\|\mathbf{x}(1)-\mathbf{x}\|\end{aligned}$$
ce qui donne $\quad \|\mathbf{x}(1)-\mathbf{x}\| = \frac{C}{1-C}\|\mathbf{x}(0)-\mathbf{x}(1)\|$

et, d'autre part,
$$\begin{array}{lll}\|\mathbf{x}(2)-\mathbf{x}\| & \leq C\|\mathbf{x}(1)-\mathbf{x}\| & \\ \|\mathbf{x}(3)-\mathbf{x}\| & \leq C\|\mathbf{x}(2)-\mathbf{x}\| & \leq C^2C\|\mathbf{x}(1)-\mathbf{x}\| \ , \\ \ldots & \ldots & \ldots\end{array}$$
d'où le résultat cherché.

EXAMEN ANALYSE NUMÉRIQUE I

Vous êtes autorisé(e)s à apporter avec vous

1. Un stylo en état de marche, et
2. Deux feuilles, format A4, manuscrites recto-verso.