Analyse Numérique

Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires

Laurence Lamoulie

EISTI

Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information

Méthodes itératives

Les méthodes itératives à connaître

- Méthodes de point fixe
  - Méthode de Jacobi
  - Méthode de Gauss-Seidel
  - Méthode de Gauss-Seidel relaxée ou méthode de relaxation
- Méthodes d'optimisation
  - Gradient conjugué

Existent aussi

- Méthode de Richardson
- Méthode de Jacobi relaxée
- Méthode SOR (Successive Over Relaxation)
- Gradients conjugués préconditionnés (GMRES)

Principe

Préliminaires

Soit A une matrice de taille $n \times n$. On pose

$$A = M - N$$

où M est une matrice inversible, pour laquelle les systèmes de matrice M sont faciles à résoudre.
On définit une suite de vecteurs x^k :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^0 \text{ donné} \\ x^k \text{ solution de } Mx^{k+1} = Nx^k + b \end{array} \right.$$

Si x^k converge vers x^∞ alors

$$x^\infty \text{ solution de } Mx^\infty = Nx^\infty + b \text{ soit } Ax^\infty = b$$

Applications : Jacobi et Gauss-Seidel

Méthode de Jacobi

On suppose que A est inversible et qu'aucun de ses éléments diagonaux ne s'annule.
On pose

$$A = \begin{bmatrix} \ddots & & -F \\ & D & \\ -E & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & U \\ & D & \\ L & & \ddots \end{bmatrix} = M - N$$

et on choisit $M = D$ et $N = E + F = -L - U$ alors

$Mx^{k+1} = Nx^k + b$ devient

$$Dx^{k+1} = (E + F)x^k + b = -(L + U)x^k + b$$

Applications : Jacobi et Gauss-Seidel

Méthode de Gauss-Seidel

Sous les mêmes hypothèses et avec la même décomposition :

$$A = \begin{bmatrix} \ddots & & -F \\ & D & \\ -E & & \ddots \end{bmatrix} = M - N$$

on choisit

$$M = D - E \text{ et } N = F$$

alors $Mx^{k+1} = Nx^k + b$ devient

$$(D - E)x^{k+1} = Fx^k + b$$

Théorie élémentaire

Condition suffisante de convergence

Soit la méthode itérative définie par $Mx^{k+1} = Nx^k + b$.
S'il existe une norme vectorielle $|.|$ telle que pour la norme matricielle subordonnée notée $\|.\|$ on ait

$$\left\| M^{-1} N \right\| < 1$$

alors, pour tout donnée initiale x^0 la suite x^k converge.

Preuve : Posons $B = M^{-1}N$ et $c = M^{-1}b$. La méthode itérative est équivalente à $x^{k+1} = Bx^k + c$ donc on aura pour tout $r \leq k$:
$x^{k+1} - x^k = Bx^k + c - Bx^k - c = \ldots = B^r \left(x^{k+1-r} - x^{k-r} \right)$
Donc $x^{k+1} - x^k = B^k \left(x^1 - x^0 \right)$

Théorie élémentaire

Donc, $\forall k > l$,

$$x^k - x^l = \sum_{j=l}^{k-1} x^{j+1} - x^j = \sum_{j=l}^{k-1} B^j \left(x^1 - x^0\right)$$

où par convention $B^0 = I$. L'inégalité triangulaire donne :

$$\left|x^k - x^l\right| \leq \sum_{j=l}^{k-1} \left\|B^j\right\| \left|x^1 - x^0\right| \leq \frac{\|B\|^k - \|B\|^l}{1 - \|B\|} \left|x^1 - x^0\right|$$

Ceci prouve que la suite $\left(x^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc elle converge.

Théorie fine

Condition suffisante de convergence

La méthode itérative définie par $Mx^{k+1} = Nx^k + b$ converge pour tout donnée initiale x^0 et pour tout vecteur b si et seulement si

$$\rho\left(M^{-1}N\right) < 1$$

alors, pour tout donnée initiale x^0 la suite x^k converge.

Remarque : Ce résultat est plus difficile à mettre en évidence que le précédent.

Réflexion théorique

Les deux résultats précédents sont équivalents car :

1^{er} résultat justificatif

Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients complexes, et soit $\|.\|$ une norme matricielle quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

2^{nd} résultat justificatif

Soit M une norme matricielle quelconque et soit A matrice $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, telle que $\rho(A) \leq < 1$. Alors il existe une norme vectorielle N dépendant de M, de N et de A telle que

$$\|A\|_N \leq 1$$

Cas des matrices hermitiennes définie positives

Résultat général pour matrices hermitiennes définie positives

Soit A une matrice hermitienne définie positive, admettant la décomposition $A = M - N$, avec M inversible. Si $M + N^*$ (qui est toujours hermitienne) est définie positive, alors la méthode itérative $Mx^{k+1} = Nx^k + b$ converge.

Pour la méthode de Jacobi, on a :
$M = D$ et $N = E + F$
donc dans le cas d'une matrice réelle, on a :
$M+N^* = D+(E+F)^T = D+F+E = 2D-D+E+F = 2D-A$
Les conditions ci-dessus se traduisent par :

- D définie positive
- $2D - A$ définie positive

(voir FAITS 3.1 et 3.2 du cours)

Méthodes relaxées

Principe général

Dans les méthode précédentes, on définit la méthode itérative par :

$$Mx^{k+1} = Nx^k + b \Leftrightarrow x^{k+1} = M^{-1}Nx^k + M^{-1}b \qquad (1)$$

En pondérant par un facteur ω (ou μ) les facteurs de (1), on remplace l'itéré calculé selon l'une des méthodes précédentes ($\widehat{x}^{(k+1)}$ dans (2)) par $x^{(k+1)}$ défini à partir de $x^{(k)}$:

$$x^{k+1} = \omega \widehat{x}^{k+1} + (1-\omega)x^k \qquad (2)$$

On utilise en fait une combinaison convexe de l'itéré au rang k et de l'itéré au rang $k+1$ pour **minimiser les risques de divergence ou d'oscillation**.

Chaque méthode précédente peut être relaxée.

Gauss-Seidel relaxée = méthode de relaxation

Gauss-Seidel relaxée = méthode de relaxation

$$(D-E)x^{k+1} = Fx^k + b$$

devient

$$(\mu D - E)x^{k+1} = ((\mu-1)D + F)\,x^k + b$$

On note $\omega = \frac{1}{\mu}$ et on écrit :

$$\left(\frac{D}{\omega} - E\right)x^{k+1} - \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)x^k = b$$

On pose $M = \frac{D}{\omega} - E$ et $N = \frac{1-\omega}{\omega}D + F$. La matrice de la méthode s'écrit :

$$\mathcal{L}_\omega = M^{-1}N = \left(\frac{D}{\omega} - E\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$$

Convergence de la méthode de relaxation

Le résultat général de convergence donne ici

$$M + N^* = \frac{D}{\omega} - E + \frac{1-\omega}{\omega} D^* + F^* = \frac{2-\omega}{\omega} D$$

Pour que $M + N^*$ soit définie positive il faut et il suffit que

$$\frac{2-\omega}{\omega} x^* D x \geq 0, \qquad \forall x \neq 0$$

D étant définie positive, il faut que $\omega \in]0, 2[$ pour que la méthode converge.

Remarques :

- Si $\omega > 1$ la méthode est aussi appelée méthode SOR pour Successive Over Relaxation
- Si $\omega = 1$ on retombe sur Gauss-Seidel

Convergence comparée de Gauss-Seidel et Jacobi

Matrices tridiagonales par blocs

Soit A une matrice tridiagonale par blocs. Alors les rayons spectraux des matrices de Jacobi et de Gauss-Seidel correspondantes sont liés par la relation :

$$\rho\left(\mathcal{L}_1\right) = \rho\left(J\right)^2$$

Donc :

- Les deux méthodes convergent ou divergent simultanément
- lorsqu'elles convergent, la méthode de Gauss-Seidel converge plus rapidement que la méthode de Jacobi.

Méthode de Gradient Conjugué

Pour toute matrice carrée A de dimension n, symétrique définie positive et tout vecteur b fixé, on pose :

$$J(x) = \frac{1}{2}\left(x^T A x\right) - b^T x$$

La solution du système $Ax = b$ est aussi le minimum de la fonctionnelle J. Pour le résoudre, on recherche le minimum de J en se servant du gradient de J.
On **descend** donc vers la solution suivant des directions deux à deux orthogonales dans $\mathbb{R}^n$.

Références

- *Analyse numérique*, M. Schatzman, InterEditions, 1991,
- *Matrix Computations, 3rd edition*, G.H. Golub, C.F. Van Loan, Johns Hopkins, 1996,
- *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, P.G. Ciarlet, Masson, Paris, 1982
- *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*, P. Lascaux R. Theodor, Masson, 1993.
- *Algèbre matricielle numérique*, C. Brezinski, document pdf, Chapitre 2