ANALYSE NUMÉRIQUE I

COURS 4

ALGÈBRE LINÉAIRE ET PERTURBATIONS

Ch. Baskiotis

LAPI – EISTI

13 décembre 2008

De l'utilité de l'algèbre linéaire

L'algèbre linéaire est la branche de la science mathématique qui a eu le développement le plus fulgurant à cause ...des ordinateurs.

De l'utilité de l'algèbre linéaire

L'algèbre linéaire est la branche de la science mathématique qui a eu le développement le plus fulgurant à cause ...des ordinateurs.

Tout calcul numérique sur ordinateur utilise peu ou prou les outils de l'algèbre linéaire.

De l'utilité de l'algèbre linéaire

L'algèbre linéaire est la branche de la science mathématique qui a eu le développement le plus fulgurant à cause ...des ordinateurs.

Tout calcul numérique sur ordinateur utilise peu ou prou les outils de l'algèbre linéaire.

Comprendre le traitement numérique des méthodes de l'algèbre linéaire est indispensable pour l'ingénieur d'aujourd'hui, de demain et, aussi, de l'après demain.

De l'utilité de l'algèbre linéaire

L'algèbre linéaire est la branche de la science mathématique qui a eu le développement le plus fulgurant à cause ...des ordinateurs.

Tout calcul numérique sur ordinateur utilise peu ou prou les outils de l'algèbre linéaire.

Comprendre le traitement numérique des méthodes de l'algèbre linéaire est indispensable pour l'ingénieur d'aujourd'hui, de demain et, aussi, de l'après demain.

Donc l'algèbre linéaire est utile pour vous, pour vos enfants et pour vos petits enfants !

Le catalogue des notions

Vos années préparatoires vous ont <u>sûrement</u> permis de connaître les concepts, méthodes et outils de l'algèbre linéaire.

Le catalogue des notions

Vos années préparatoires vous ont <u>sûrement</u> permis de connaître les concepts, méthodes et outils de l'algèbre linéaire.

Dans les pages 32-36 du poly est donné un catalogue à la Manufrance des notions indispensables pour la suite de ce chapitre et du cours.

Le catalogue des notions

Vos années préparatoires vous ont <u>sûrement</u> permis de connaître les concepts, méthodes et outils de l'algèbre linéaire.

Dans les pages 32-36 du poly est donné un catalogue à la Manufrance des notions indispensables pour la suite de ce chapitre et du cours. Pour chaque notion le prix n'est pas indiqué. Il va de 0 à ...nombre d'heures nécessaires pour maîtriser la notion.

Le catalogue des notions

Vos années préparatoires vous ont sûrement permis de connaître les concepts, méthodes et outils de l'algèbre linéaire.

Dans les pages 32-36 du poly est donné un catalogue à la Manufrance des notions indispensables pour la suite de ce chapitre et du cours. Pour chaque notion le prix n'est pas indiqué. Il va de 0 à ...nombre d'heures nécessaires pour maîtriser la notion.

Ne vous leurrez pas. ***Sans connaître et maîtriser le contenu de ces pages, vous ne serez même pas un technicien supérieur !***

Matrice = Table de Multiplication – I

- On prend deux espaces vectoriels $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ avec bases $(\mathbf{u}_i)_{i=1,\ldots,m}$ et $(\mathbf{v}_j)_{j=1,\ldots,n}$ respectivement.

Matrice $=$ Table de Multiplication – I

- On prend deux espaces vectoriels $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ avec bases $(\mathbf{u}_i)_{i=1,\ldots,m}$ et $(\mathbf{v}_j)_{j=1,\ldots,n}$ respectivement.
- On prend une application linéaire $f : U \to V$.

Matrice = Table de Multiplication – I

- On prend deux espaces vectoriels $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ avec bases $(\mathbf{u}_i)_{i=1,\ldots,m}$ et $(\mathbf{v}_j)_{j=1,\ldots,n}$ respectivement.
- On prend une application linéaire $f : U \to V$.
- Problème : Comment exprimer cette application, c'est-à-dire comment, étant donné un élément $\mathbf{x} \in U$, passer à son image $f(\mathbf{x}) \in V$?

Matrice = Table de Multiplication – I

- On prend deux espaces vectoriels $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ avec bases $(\mathbf{u}_i)_{i=1,\ldots,m}$ et $(\mathbf{v}_j)_{j=1,\ldots,n}$ respectivement.
- On prend une application linéaire $f : U \to V$.
- Problème : Comment exprimer cette application, c'est-à-dire comment, étant donné un élément $\mathbf{x} \in U$, passer à son image $f(\mathbf{x}) \in V$?
- Réponse : En utilisant les images $f(\mathbf{u}_i); i = 1, \ldots, m$ des vecteurs de la base de U.

Matrice = Table de Multiplication – II

- Pour un vecteur de base $\mathbf{u}_i \in U$ on a pour son image

$$f(\mathbf{u}_i) = [f_{1i}, \ldots, f_{ni}]^\top$$

Matrice = Table de Multiplication – II

- Pour un vecteur de base $\mathbf{u}_i \in U$ on a pour son image

$$f(\mathbf{u}_i) = [f_{1i}, \dots, f_{ni}]^\top$$

- On forme la matrice $\mathbf{F}$ de format $(n \times m)$ dont les m colonnes sont les images des vecteurs de base de U :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nm} \end{bmatrix}$$

Matrice = Table de Multiplication – II

- Pour un vecteur de base $\mathbf{u}_i \in U$ on a pour son image

$$f(\mathbf{u}_i) = [f_{1i}, \ldots, f_{ni}]^\top$$

- On forme la matrice $\mathbf{F}$ de format $(n \times m)$ dont les m colonnes sont les images des vecteurs de base de U :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nm} \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{F}$ est la table de multiplication qui permet de passer d' un vecteur $\mathbf{x} \in U$ à son image $f(\mathbf{x}) \in V$:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{F}\mathbf{x}$$

Utilisation de l'algèbre linéaire

Avec l'algèbre linéaire on résout essentiellement trois problèmes :

1. Résolution d'un système d'équations linéaires.

Utilisation de l'algèbre linéaire

Avec l'algèbre linéaire on résout essentiellement trois problèmes :

1. Résolution d'un système d'équations linéaires.
2. Inversion d'une matrice.

Utilisation de l'algèbre linéaire

Avec l'algèbre linéaire on résout essentiellement trois problèmes :

1. Résolution d'un système d'équations linéaires.
2. Inversion d'une matrice.
3. Calcul des valeurs et vecteurs propres.

Résolution numérique d'un système

Une matrice de format $(m \times n)$ dans un ordinateur c'est comme un nombre dans un ordinateur.

Résolution numérique d'un système

Une matrice de format $(m \times n)$ dans un ordinateur c'est comme un nombre dans un ordinateur.
Mais s'il y a un problème d'arrondi avec un nombre, il y a $m \times n$ problèmes d'arrondi avec une matrice.

Résolution numérique d'un système

Une matrice de format $(m \times n)$ dans un ordinateur c'est comme un nombre dans un ordinateur.
Mais s'il y a un problème d'arrondi avec un nombre, il y a $m \times n$ problèmes d'arrondi avec une matrice.
Donc on essaie de résoudre le système

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

et on résout le système

$$(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$$

et on ne se rend même pas compte !

Résolution numérique d'un système

Une matrice de format $(m \times n)$ dans un ordinateur c'est comme un nombre dans un ordinateur.
Mais s'il y a un problème d'arrondi avec un nombre, il y a $m \times n$ problèmes d'arrondi avec une matrice.
Donc on essaie de résoudre le système

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

et on résout le système

$$(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$$

et on ne se rend même pas compte !
Il convient d'évaluer l'erreur $\Delta\mathbf{x}$ de la solution en tenant compte des erreurs de la matrice $\Delta\mathbf{A}$ et du vecteur $\Delta\mathbf{b}$.

Norme vectorielle

Pour évaluer la différence entre deux vecteurs (par exemple entre $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}$) il faut utiliser **la norme** dont la définition générale est

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid^p \right)^{1/p} \; ; \; p \geq 1$$

Norme vectorielle

Pour évaluer la différence entre deux vecteurs (par exemple entre $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}$) il faut utiliser **la norme** dont la définition générale est

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid^p \right)^{1/p} \; ; \; p \geq 1$$

Les plus utilisées sont les normes pour $p = 1, 2, \infty$:

- ***Norme 1*** : $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid$.

Norme vectorielle

Pour évaluer la différence entre deux vecteurs (par exemple entre $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}$) il faut utiliser **la norme** dont la définition générale est

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid^p \right)^{1/p} \; ; \; p \geq 1$$

Les plus utilisées sont les normes pour $p = 1, 2, \infty$:

- ***Norme 1*** : $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid$.
- ***Norme 2 ou euclidienne*** : $\|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}$

Norme vectorielle

Pour évaluer la différence entre deux vecteurs (par exemple entre $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}$) il faut utiliser **la norme** dont la définition générale est

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid^p \right)^{1/p} \; ; \; p \geq 1$$

Les plus utilisées sont les normes pour $p = 1, 2, \infty$:

- ***Norme 1*** : $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid$.
- ***Norme 2 ou euclidienne*** : $\|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}$
- ***Norme ∞ ou max*** : $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,\ldots n} \mid x_i \mid$

N.B. *Dans la suite de l'exposé, on considérera la norme euclidienne* $\|\cdot\|_2$

Norme matricielle – I

Pour fabriquer une norme pour les matrices on va partir des vecteurs.

Primo : Quelles sont les propriétés de la norme matricielle ?

Norme matricielle – I

Pour fabriquer une norme pour les matrices on va partir des vecteurs.

Primo : Quelles sont les propriétés de la norme matricielle ?
Comme on ne veut pas refaire la roue à chaque fois, on regarde les propriétés de la norme vectorielle et on les transpose.

Norme matricielle – I

Pour fabriquer une norme pour les matrices on va partir des vecteurs.

Primo : Quelles sont les propriétés de la norme matricielle ?
Comme on ne veut pas refaire la roue à chaque fois, on regarde les propriétés de la norme vectorielle et on les transpose.
Ainsi, on a :

1. $\|\mathbf{A}\| \geq 0$ *et* $\|\mathbf{A}\| = 0$ si et seulement si $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Norme matricielle – I

Pour fabriquer une norme pour les matrices on va partir des vecteurs.

Primo : Quelles sont les propriétés de la norme matricielle ?
Comme on ne veut pas refaire la roue à chaque fois, on regarde les propriétés de la norme vectorielle et on les transpose.
Ainsi, on a :

1. $\|\mathbf{A}\| \geq 0$ *et* $\|\mathbf{A}\| = 0$ si et seulement si $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.
2. $\|\alpha\mathbf{A}\| = \mid \alpha \mid \|\mathbf{A}\| \; \forall\alpha \in \mathbb{R}$.

Norme matricielle – I

Pour fabriquer une norme pour les matrices on va partir des vecteurs.

Primo : Quelles sont les propriétés de la norme matricielle ?
Comme on ne veut pas refaire la roue à chaque fois, on regarde les propriétés de la norme vectorielle et on les transpose.
Ainsi, on a :

1. $\|\mathbf{A}\| \geq 0$ *et* $\|\mathbf{A}\| = 0$ si et seulement si $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.
2. $\|\alpha \mathbf{A}\| = \mid \alpha \mid \|\mathbf{A}\| \; \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
3. $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$

Norme matricielle – II

Deuxio : Comment fabriquer une norme matricielle à partir de la norme vectorielle ?

Norme matricielle – II

Deuxio : Comment fabriquer une norme matricielle à partir de la norme vectorielle ?

Première étape : On rétrécit le monde.

Tous sur la sphère !

Norme matricielle – II

Deuxio : Comment fabriquer une norme matricielle à partir de la norme vectorielle ?
Première étape : On rétrécit le monde.

Tous sur la sphère !

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$$

Norme matricielle – II

Deuxio : Comment fabriquer une norme matricielle à partir de la norme vectorielle ?

Première étape : On rétrécit le monde.

Tous sur la sphère !

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \in \mathbf{S}_n(0,1)$$

Norme matricielle – II

Deuxio : Comment fabriquer une norme matricielle à partir de la norme vectorielle ?

Première étape : On rétrécit le monde.

Tous sur la sphère !

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \in \mathbf{S}_n(0,1)$$

où

$$\mathbf{S}_n(\mathbf{0},1) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{x} = 1\right\}$$

hyper-sphère à n dimensions,
de centre $\mathbf{0}$ et de rayon 1.

Norme matricielle – II

Deuxio : Comment fabriquer une norme matricielle à partir de la norme vectorielle ?

Première étape : On rétrécit le monde.

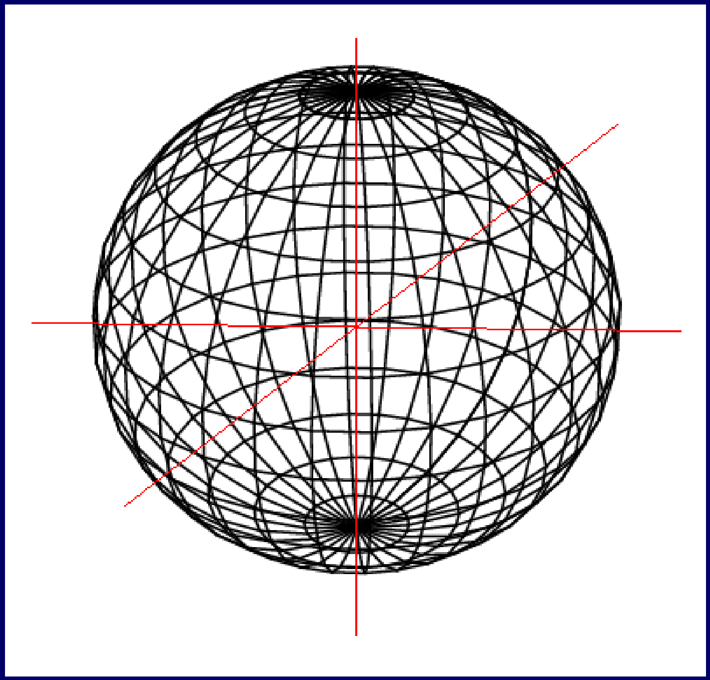
Tous sur la sphère !

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \in \mathbf{S}_n(0,1)$$

où

$$\mathbf{S}_n(\mathbf{0},1) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{x} = 1\right\}$$

hyper-sphère à n dimensions,
de centre $\mathbf{0}$ et de rayon 1.



Norme matricielle – III

Deuxième étape : On prend une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétrique et notons par A l'application linéaire correspondante.

De la sphère à l'ellipsoïde !

Norme matricielle – III

Deuxième étape : On prend une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétrique et notons par A l'application linéaire correspondante.

De la sphère à l'ellipsoïde !

Si A est appliquée à la sphère unitaire $\mathbf{S}_n(\mathbf{0}, 1) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{x} = 1 \right\}$

Norme matricielle – III

Deuxième étape : On prend une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symétrique et notons par A l'application linéaire correspondante.

De la sphère à l'ellipsoïde !

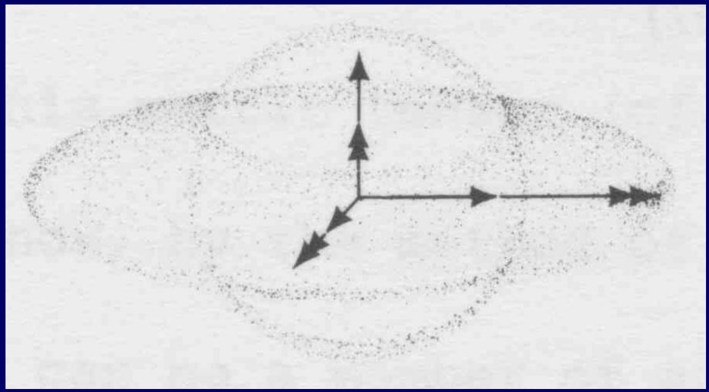
Si A est appliquée à la sphère unitaire $\mathbf{S}_n(\mathbf{0}, 1) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{x} = 1\right\}$ on obtient un ellipsoïde dont les axes principaux sont les vecteurs propres de $\mathbf{A}$.

Norme matricielle – III

Deuxième étape : On prend une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symétrique et notons par A l'application linéaire correspondante.

De la sphère à l'ellipsoïde !

Si A est appliquée à la sphère unitaire $\mathbf{S}_n(\mathbf{0},1) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{x} = 1\right\}$ on obtient un ellipsoïde dont les axes principaux sont les vecteurs propres de $\mathbf{A}$.

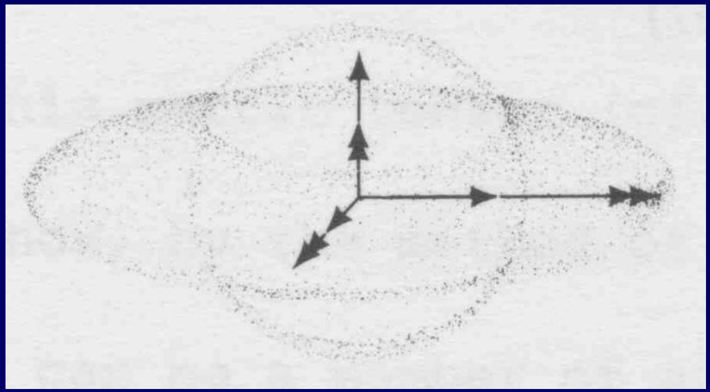


Norme matricielle – III

Deuxième étape : On prend une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symétrique et notons par A l'application linéaire correspondante.

De la sphère à l'ellipsoïde !

Si A est appliquée à la sphère unitaire $\mathbf{S}_n(\mathbf{0}, 1) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{x} = 1\right\}$ on obtient un ellipsoïde dont les axes principaux sont les vecteurs propres de $\mathbf{A}$.



Troisième étape : On prendra comme norme matricielle de $\mathbf{A}$, la plus grande, en module, valeur propre de $\mathbf{A}$ (c'est celle qui réalise le plus grand déplacement d'un vecteur unitaire sur l'ellipsoïde), qui s'appelle le rayon spectral de $\mathbf{A}$ et sera noté par $\rho(\mathbf{A})$.

Norme matricielle – IV

Quatrième étape : Généralisation. La matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est quelconque.

Norme matricielle – IV

Quatrième étape : Généralisation. La matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est quelconque.
On crée une matrice symétrique à partir de la matrice matrice $\mathbf{A}$:

Norme matricielle – IV

Quatrième étape : Généralisation. La matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est quelconque.

On crée une matrice symétrique à partir de la matrice matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{A}$$

Norme matricielle – IV

Quatrième étape : Généralisation. La matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est quelconque. On crée une matrice symétrique à partir de la matrice matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{A}$$

et on pose comme norme de $\mathbf{A}$ la valeur $\sqrt{\rho(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})}$.

Norme matricielle – IV

Quatrième étape : Généralisation. La matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est quelconque. On crée une matrice symétrique à partir de la matrice matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{A}$$

et on pose comme norme de $\mathbf{A}$ la valeur $\sqrt{\rho(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})}$.

Formalisons : On définit

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \|\mathbf{x}\| = 1}} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2$$

Norme matricielle – IV

Quatrième étape : Généralisation. La matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est quelconque.
On crée une matrice symétrique à partir de la matrice matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{A}$$

et on pose comme norme de $\mathbf{A}$ la valeur $\sqrt{\rho(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})}$.

Formalisons : On définit

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sup_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \\ \|\mathbf{x}\|=1}} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2$$

Tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ peut avoir une norme égale à 1, il suffit de faire $\dfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_p}$.

Norme matricielle – IV

Quatrième étape : Généralisation. La matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est quelconque.
On crée une matrice symétrique à partir de la matrice matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{A}$$

et on pose comme norme de $\mathbf{A}$ la valeur $\sqrt{\rho(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})}$.

Formalisons : On définit

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sup_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \\ \|\mathbf{x}\|=1}} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2$$

Tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ peut avoir une norme égale à 1, il suffit de faire $\dfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_p}$.

Et donc, tout naturellement, on prend pour norme matricielle

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sup_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}$$

Norme matricielle – V

Les bonnes idées il faut les utiliser partout.

Norme matricielle – V

Les bonnes idées il faut les utiliser partout.

La définition de la norme pour $p = 2$ on peut l'étendre à toute valeur de p.

Norme matricielle – V

Les bonnes idées il faut les utiliser partout.
La définition de la norme pour $p = 2$ on peut l'étendre à toute valeur de p.
On aura donc

DÉFINITION DE LA NORME MATRICIELLE

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sup_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}$$

On peut prouver que cette dernière relation définit bien une norme.
Cette norme est appelée ***norme subordonnée à la norme vectorielle correspondante*** et elle sera notée par

$$\operatorname{lub}(\mathbf{A}) = \sup_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

Norme matricielle – V

Les bonnes idées il faut les utiliser partout.
La définition de la norme pour $p = 2$ on peut l'étendre à toute valeur de p.
On aura donc

DÉFINITION DE LA NORME MATRICIELLE

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sup_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}$$

On peut prouver que cette dernière relation définit bien une norme.
Cette norme est appelée ***norme subordonnée à la norme vectorielle correspondante*** et elle sera notée par

$$\mathrm{lub}\,(\mathbf{A}) = \sup_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

Norme matricielle – V

Les bonnes idées il faut les utiliser partout.
La définition de la norme pour $p = 2$ on peut l'étendre à toute valeur de p.
On aura donc

Définition de la Norme Matricielle

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sup_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}$$

On peut prouver que cette dernière relation définit bien une norme.
Cette norme est appelée ***norme subordonnée à la norme vectorielle correspondante*** et elle sera notée par

$$\mathrm{lub}\,(\mathbf{A}) = \sup_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

Les normes subordonnées sont sous-multiplicatives, à savoir elles satisfont à l'inégalité :

$$\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|$$

Norme matricielle – VI

On connaît les valeurs des normes subordonnées pour $p = 1, 2, \infty$:

– ***Norme 1 – somme des colonnes*** :

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \sup_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \\ \|\mathbf{x}\|_1=1}} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |\ a_{ij}\ |$$

Norme matricielle – VI

On connaît les valeurs des normes subordonnées pour $p = 1, 2, \infty$:

– ***Norme 1 – somme des colonnes*** :

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \sup_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \\ \|\mathbf{x}\|_1=1}} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |\ a_{ij}\ |$$

– ***Norme 2 ou de Schur*** :

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sup_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \\ \|\mathbf{x}\|_2=1}} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |\ a_{ij}\ |^2 \right)^{1/2}$$

Norme matricielle – VI

On connaît les valeurs des normes subordonnées pour $p = 1, 2, \infty$:

– *Norme 1 – somme des colonnes* :

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \sup_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \\ \|\mathbf{x}\|_1=1}} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} \mid a_{ij} \mid$$

– *Norme 2 ou de Schur* :

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sup_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \\ \|\mathbf{x}\|_2=1}} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \mid a_{ij} \mid^2 \right)^{1/2}$$

– *Norme infinie – somme des lignes* :

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \sup_{\substack{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \\ \|\mathbf{x}\|_\infty=1}} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} \mid a_{ij} \mid$$

Nombre-condition

On a déjà vu qu'un algorithme numérique $\boldsymbol{\phi}$ – et aussi un programme de calcul scientifique – est la transformation des données en entrée $\mathbf{x}$ en résultats en sortie $\mathbf{y}$ selon la relation

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$$

Nombre-condition

On a déjà vu qu'un algorithme numérique $\boldsymbol{\phi}$ – et aussi un programme de calcul scientifique – est la transformation des données en entrée $\mathbf{x}$ en résultats en sortie $\mathbf{y}$ selon la relation

$$\mathbf{y} = \phi(\mathbf{x})$$

S'il y a perturbation à l'entrée, cette perturbation sera reflétée à la sortie et on aura

$$\mathbf{y} + \Delta\mathbf{y} = \phi(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$$

Nombre-condition

On a déjà vu qu'un algorithme numérique $\boldsymbol{\phi}$ – et aussi un programme de calcul scientifique – est la transformation des données en entrée $\mathbf{x}$ en résultats en sortie $\mathbf{y}$ selon la relation

$$\mathbf{y} = \phi(\mathbf{x})$$

S'il y a perturbation à l'entrée, cette perturbation sera reflétée à la sortie et on aura

$$\mathbf{y} + \Delta\mathbf{y} = \phi(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$$

L'erreur à la sortie est bornée selon la relation

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta}\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|} \leq \kappa\left(\mathbf{x}\right)\frac{\|\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

où $\kappa\left(\mathbf{x}\right)$ est le **nombre condition** des entrées.

Conditionnement d'une matrice

On définit le conditionnement d'une matrice $\mathbf{A}$ par la quantité

$$\operatorname{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|$$

Conditionnement d'une matrice

On définit le conditionnement d'une matrice $\mathbf{A}$ par la quantité

$$\mathrm{cond}\,(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|$$

Le conditionnement peut aussi être noté par $\kappa(A)$.

Conditionnement d'une matrice

On définit le conditionnement d'une matrice $\mathbf{A}$ par la quantité

$$\mathrm{cond}\,(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|$$

Le conditionnement peut aussi être noté par $\kappa(A)$.

Dans la suite on verra la justification du choix que nous venons d'effectuer pour le conditionnement d'une matrice.

Matrices régulières et conditionnement

Théorème Si $\mathbf{A}$ est régulière et si

$$\frac{\|\Delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} < \frac{1}{\operatorname{cond}(\mathbf{A})}$$

alors la matrice $\mathbf{A}+\Delta\mathbf{A}$ est aussi régulière.

Matrices régulières et conditionnement

THÉORÈME Si $\mathbf{A}$ est régulière et si

$$\frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} < \frac{1}{\operatorname{cond}(\mathbf{A})}$$

alors la matrice $\mathbf{A}+\Delta\mathbf{A}$ est aussi régulière.

De ce théorème on en déduit que l'inverse du conditionnement de la matrice « mesure » la distance qui sépare $\mathbf{A}$ d'une matrice singulière.

Matrices régulières et conditionnement

THÉORÈME Si $\mathbf{A}$ est régulière et si

$$\frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} < \frac{1}{\operatorname{cond}(\mathbf{A})}$$

alors la matrice $\mathbf{A}+\Delta\mathbf{A}$ est aussi régulière.

De ce théorème on en déduit que l'inverse du conditionnement de la matrice « mesure » la distance qui sépare $\mathbf{A}$ d'une matrice singulière.

Donc si le nombre-condition d'une matrice $\mathbf{A}$ est grand, alors cette matrice est proche de la singularité.

Bornes de l'erreur de la solution d'un système

Considérons le système

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}; \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$$

Comme $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$ ont des erreurs d'arrondi, la solution obtenue est une solution approchée $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$, qui peut être vu comme une solution perturbée de la solution exacte.

Bornes de l'erreur de la solution d'un système

Considérons le système

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}; \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$$

Comme $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$ ont des erreurs d'arrondi, la solution obtenue est une solution approchée $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$, qui peut être vu comme une solution perturbée de la solution exacte.
L'objectif ici est d'évaluer la borne supérieure de la perturbation $\Delta\mathbf{x}$.

Perturbations de $\mathbf{b}$

Soit le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Perturbations de $\mathbf{b}$

Soit le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
Si à la place du vecteur $\mathbf{b}$ nous avons le vecteur perturbé $\mathbf{b} + \mathbf{\Delta b}$, la solution $\mathbf{x}$ est aussi perturbée et elle devient $\mathbf{x} + \mathbf{\Delta x}$.

Perturbations de $\mathbf{b}$

Soit le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
Si à la place du vecteur $\mathbf{b}$ nous avons le vecteur perturbé $\mathbf{b} + \mathbf{\Delta b}$, la solution $\mathbf{x}$ est aussi perturbée et elle devient $\mathbf{x} + \mathbf{\Delta x}$.
Nous avons donc le système linéaire :

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{x} + \mathbf{\Delta x}\right) = \mathbf{b} + \mathbf{\Delta b},\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Perturbations de $\mathbf{b}$

Soit le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
Si à la place du vecteur $\mathbf{b}$ nous avons le vecteur perturbé $\mathbf{b} + \mathbf{\Delta b}$, la solution $\mathbf{x}$ est aussi perturbée et elle devient $\mathbf{x} + \mathbf{\Delta x}$.
Nous avons donc le système linéaire :

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{x} + \mathbf{\Delta x}\right) = \mathbf{b} + \mathbf{\Delta b},\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

et nous avons pour l'erreur

$$\frac{\|\mathbf{\Delta x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa\left(\mathbf{A}\right) \frac{\|\mathbf{\Delta b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Perturbations de $\mathbf{b}$

Soit le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
Si à la place du vecteur $\mathbf{b}$ nous avons le vecteur perturbé $\mathbf{b} + \mathbf{\Delta b}$, la solution $\mathbf{x}$ est aussi perturbée et elle devient $\mathbf{x} + \mathbf{\Delta x}$.
Nous avons donc le système linéaire :

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{x} + \mathbf{\Delta x}\right) = \mathbf{b} + \mathbf{\Delta b},\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

et nous avons pour l'erreur

$$\frac{\|\mathbf{\Delta x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa\left(\mathbf{A}\right) \frac{\|\mathbf{\Delta b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Donc si $\kappa\left(\mathbf{A}\right) \gg 1$, une petite perturbation du vecteur $\mathbf{b}$ peut provoquer une grande perturbation de la solution.

Perturbations de $\mathbf{A}$

Si la matrice $\mathbf{A}$ est perturbée et on a à sa place $\mathbf{A} + \mathbf{\Delta A}$, alors le système linéaire devient :

$$(\mathbf{A} + \mathbf{\Delta A})\,(\mathbf{x} + \mathbf{\Delta x}) = \mathbf{b}$$

Perturbations de $\mathbf{A}$

Si la matrice $\mathbf{A}$ est perturbée et on a à sa place $\mathbf{A} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{A}$, alors le système linéaire devient :

$$(\mathbf{A} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{A})\,(\mathbf{x} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

et on a pour l'erreur

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa\,(\mathbf{A}) \cdot \frac{\|\boldsymbol{\Delta}\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

Perturbations de $\mathbf{A}$

Si la matrice $\mathbf{A}$ est perturbée et on a à sa place $\mathbf{A} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{A}$, alors le système linéaire devient :

$$(\mathbf{A} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{A})(\mathbf{x} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

et on a pour l'erreur

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa(\mathbf{A}) \cdot \frac{\|\boldsymbol{\Delta}\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

Même remarque que précédemment.

Tout est perturbé

Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$ subissent des perturbations, le système linéaire devient :

$$(\mathbf{A} + \mathbf{\Delta A})(\mathbf{x} + \mathbf{\Delta x}) = \mathbf{b} + \mathbf{\Delta b}$$

Tout est perturbé

Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$ subissent des perturbations, le système linéaire devient :

$$(\mathbf{A} + \mathbf{\Delta A})\,(\mathbf{x} + \mathbf{\Delta x}) = \mathbf{b} + \mathbf{\Delta b}$$

et l'erreur dans ce cas est

$$\frac{\|\mathbf{\Delta x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa\,(\mathbf{A}) \cdot \left(\frac{\|\mathbf{\Delta A}\|}{\|\mathbf{A}\|} + \frac{\|\mathbf{\Delta b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \right)$$

Même remarque que précédemment.

Morale de l'histoire

De trois formules de l'erreur précédentes, on conclut que pour avoir une petite modification $\mathbf{\Delta x}$ du vecteur $\mathbf{x}$ il n'est pas suffisant que les erreurs relatives

$$\frac{\|\mathbf{\Delta A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

et

$$\frac{\|\mathbf{\Delta b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

soient petites.

Morale de l'histoire

De trois formules de l'erreur précédentes, on conclut que pour avoir une petite modification $\mathbf{\Delta x}$ du vecteur $\mathbf{x}$ il n'est pas suffisant que les erreurs relatives

$$\frac{\|\mathbf{\Delta A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

et

$$\frac{\|\mathbf{\Delta b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

soient petites.

Il faut, de plus, que la matrice $\mathbf{A}$ soit bien conditionnée, c'est-à-dire que le conditionnement $\kappa(\mathbf{A})$ de la matrice $\mathbf{A}$ soit petit.

Analyse active de l'erreur - La raison

On a déjà vu que lors du déroulement d'un algorithme, l'erreur voyage.

Analyse active de l'erreur - La raison

On a déjà vu que lors du déroulement d'un algorithme, l'erreur voyage.
Elle prend le même train que l'algorithme, mais elle change constamment de place !

Analyse active de l'erreur - La raison

On a déjà vu que lors du déroulement d'un algorithme, l'erreur voyage.
Elle prend le même train que l'algorithme, mais elle change constamment de place !
Tantôt on la retrouve en 1ère classe – grosse erreur de luxe, tantôt en seconde – erreur tout à fait quelconque.

Analyse active de l'erreur - La raison

On a déjà vu que lors du déroulement d'un algorithme, l'erreur voyage.
Elle prend le même train que l'algorithme, mais elle change constamment de place !
Tantôt on la retrouve en 1ère classe – grosse erreur de luxe, tantôt en seconde – erreur tout à fait quelconque.
Parfois dans le compartiment fumeurs (si, si, il y a des endroits où il existe encore des trains civilisés) – erreur bizarre.

Analyse active de l'erreur - La raison

On a déjà vu que lors du déroulement d'un algorithme, l'erreur voyage.
Elle prend le même train que l'algorithme, mais elle change constamment de place !
Tantôt on la retrouve en 1ère classe – grosse erreur de luxe, tantôt en seconde – erreur tout à fait quelconque.
Parfois dans le compartiment fumeurs (si, si, il y a des endroits où il existe encore des trains civilisés) – erreur bizarre.
Elle va aussi au restaurant – se régaler d'un programmeur négligeant.

Analyse active de l'erreur - La raison

On a déjà vu que lors du déroulement d'un algorithme, l'erreur voyage.
Elle prend le même train que l'algorithme, mais elle change constamment de place !
Tantôt on la retrouve en 1ère classe – grosse erreur de luxe, tantôt en seconde – erreur tout à fait quelconque.
Parfois dans le compartiment fumeurs (si, si, il y a des endroits où il existe encore des trains civilisés) – erreur bizarre.
Elle va aussi au restaurant – se régaler d'un programmeur négligeant.
Problème : Comment faire pour qu'elle occupe toujours la même place, de préférence une modeste place de seconde ?

Analyse active de l'erreur - La raison

On a déjà vu que lors du déroulement d'un algorithme, l'erreur voyage.
Elle prend le même train que l'algorithme, mais elle change constamment de place !
Tantôt on la retrouve en 1ère classe – grosse erreur de luxe, tantôt en seconde – erreur tout à fait quelconque.
Parfois dans le compartiment fumeurs (si, si, il y a des endroits où il existe encore des trains civilisés) – erreur bizarre.
Elle va aussi au restaurant – se régaler d'un programmeur négligeant.
Problème : Comment faire pour qu'elle occupe toujours la même place, de préférence une modeste place de seconde ?
Réponse : En utilisant l'**analyse active de l'erreur** technique proposée par Wilkinson.

Analyse active de l'erreur - Le fondement

Notons par $\bigoplus$ une opération arithmétique élémentaire quelconque entre deux réels.

Analyse active de l'erreur - Le fondement

Notons par $\bigoplus$ une opération arithmétique élémentaire quelconque entre deux réels.
L'erreur de l'opération est donnée par

$$\mid x \oplus y - m\,(x \oplus y)\mid \leq \mathrm{eps} \cdot \mid m\,(x \oplus y)\mid$$

Analyse active de l'erreur - Le fondement

Notons par $\bigoplus$ une opération arithmétique élémentaire quelconque entre deux réels.
L'erreur de l'opération est donnée par

$$| x \oplus y - m\,(x \oplus y) | \leq \mathrm{eps} \cdot | m\,(x \oplus y) |$$

Comme on connaît $m\,(x \oplus y)$, on peut calculer la borne supérieure de l'erreur de ce calcul.

Analyse active de l'erreur - La technique

Si l'algorithme consiste à répéter le même calcul, à chacune de ses étapes on a :

$$s_k = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_k$$

Analyse active de l'erreur - La technique

Si l'algorithme consiste à répéter le même calcul, à chacune de ses étapes on a :

$$s_k = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_k$$

On a $s_k = s_{k-1} \oplus x_k$
Supposons que $m\,(s_k) = s_k + e_k$, avec $\mid e_k \mid \leq \text{eps}$ et $m\,(x_k) = (1 + \eta_k)x_k$, avec $\mid \eta_k \mid \leq \text{eps}$
c-à-d que l'opération $\oplus$ s'est bien passée à l'itération k.

Analyse active de l'erreur - La technique

Si l'algorithme consiste à répéter le même calcul, à chacune de ses étapes on a :

$$s_k = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_k$$

On a $s_k = s_{k-1} \oplus x_k$
Supposons que $m\,(s_k) = s_k + e_k$, avec $\mid e_k \mid \leq \mathrm{eps}$ et $m\,(x_k) = (1 + \eta_k) x_k$, avec $\mid \eta_k \mid \leq \mathrm{eps}$
c-à-d que l'opération $\oplus$ s'est bien passée à l'itération k.
On obtient ainsi $m\,(s_k) = \dfrac{s_k}{1 + \varepsilon_k}$, avec $\mid \varepsilon_k \mid \leq \mathrm{eps}$ ou, encore $(1 + \varepsilon_k)\, m\,(s_k) = m\,(s_{k-1}) \oplus m\,(x_k)$

Analyse active de l'erreur - La technique

Si l'algorithme consiste à répéter le même calcul, à chacune de ses étapes on a :

$$s_k = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_k$$

On a $s_k = s_{k-1} \oplus x_k$
Supposons que $m\left(s_k\right) = s_k + e_k$, avec $\mid e_k \mid \leq \mathrm{eps}$ et $m\left(x_k\right) = (1+\eta_k)x_k$, avec $\mid \eta_k \mid \leq \mathrm{eps}$
c-à-d que l'opération $\oplus$ s'est bien passée à l'itération k.
On obtient ainsi $m\left(s_k\right) = \dfrac{s_k}{1+\varepsilon_k}$, avec $\mid \varepsilon_k \mid \leq \mathrm{eps}$ ou, encore $(1+\varepsilon_k)\, m\left(s_k\right) = m\left(s_{k-1}\right) \oplus m\left(x_k\right)$
En développant on obtient

$$\begin{aligned} s_k + e_k + \varepsilon_k m\left(s_k\right) &= m\left(s_{k-1}\right) \oplus m\left(x_k\right) \\ &= m\left(s_{k-1}\right) \oplus \left(x_k + \eta_k x_k\right) \\ &= \left(s_{k-1} + e_{k-1} \oplus \left(x_k + \eta_k x_k\right)\right. \end{aligned}$$

Analyse active de l'erreur - La technique

Si l'algorithme consiste à répéter le même calcul, à chacune de ses étapes on a :

$$s_k = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_k$$

On a $s_k = s_{k-1} \oplus x_k$
Supposons que $m(s_k) = s_k + e_k$, avec $\mid e_k \mid \leq \text{eps}$ et $m(x_k) = (1+\eta_k)x_k$, avec $\mid \eta_k \mid \leq \text{eps}$
c-à-d que l'opération $\oplus$ s'est bien passée à l'itération k.
On obtient ainsi $m(s_k) = \dfrac{s_k}{1+\varepsilon_k}$, avec $\mid \varepsilon_k \mid \leq \text{eps}$ ou, encore $(1+\varepsilon_k)\, m(s_k) = m(s_{k-1}) \oplus m(x_k)$
En développant on obtient

$$\begin{aligned} s_k + e_k + \varepsilon_k m(s_k) &= m(s_{k-1}) \oplus m(x_k) \\ &= m(s_{k-1}) \oplus (x_k + \eta_k x_k) \\ &= (s_{k-1} + e_{k-1} \oplus (x_k + \eta_k x_k) \end{aligned}$$

et donc $e_k = e_{k-1} + \eta_k x_k - \varepsilon_k m(s_k)$

Analyse active de l'erreur - La technique

Si l'algorithme consiste à répéter le même calcul, à chacune de ses étapes on a :

$$s_k = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_k$$

On a $s_k = s_{k-1} \oplus x_k$
Supposons que $m\left(s_k\right) = s_k + e_k$, avec $\mid e_k \mid \leq \text{eps}$ et $m\left(x_k\right) = (1+\eta_k)x_k$, avec $\mid \eta_k \mid \leq \text{eps}$
c-à-d que l'opération $\oplus$ s'est bien passée à l'itération k.
On obtient ainsi $m\left(s_k\right) = \dfrac{s_k}{1+\varepsilon_k}$, avec $\mid \varepsilon_k \mid \leq \text{eps}$ ou, encore $(1+\varepsilon_k)\, m\left(s_k\right) = m\left(s_{k-1}\right) \oplus m\left(x_k\right)$
En développant on obtient

$$\begin{aligned} s_k + e_k + \varepsilon_k m\left(s_k\right) &= m\left(s_{k-1}\right) \oplus m\left(x_k\right) \\ &= m\left(s_{k-1}\right) \oplus \left(x_k + \eta_k x_k\right) \\ &= \left(s_{k-1} + e_{k-1} \oplus \left(x_k + \eta_k x_k\right)\right. \end{aligned}$$

et donc $e_k = e_{k-1} + \eta_k x_k - \varepsilon_k m\left(s_k\right)$
ce qui donne $\mid e_k \mid \leq \mid e_{k-1} \mid + \text{eps} \cdot \mid x_k \mid + \text{eps} \cdot \mid m\left(s_k\right) \mid$

Analyse active de l'erreur - La conclusion

La relation

$$|\, e_k \,| \leq |\, e_{k-1} \,| + \mathrm{eps} \cdot |\, x_k \,| + \mathrm{eps} \cdot |\, m\,(s_k) \,|$$

Analyse active de l'erreur - La conclusion

La relation

$$| e_k | \leq | e_{k-1} | + \mathrm{eps} \cdot | x_k | + \mathrm{eps} \cdot | m(s_k) |$$

s'écrit aussi

$$| e_k | \leq | e_{k-1} | + \mathrm{eps} \cdot (| x_k | + | m(s_k) |) \text{ avec } e_0 = 0$$

Analyse active de l'erreur - La conclusion

La relation

$$| e_k | \leq | e_{k-1} | + \mathrm{eps} \cdot | x_k | + \mathrm{eps} \cdot | m(s_k) |$$

s'écrit aussi

$$| e_k | \leq | e_{k-1} | + \mathrm{eps} \cdot (| x_k | + | m(s_k) |) \text{ avec } e_0 = 0$$

On a donc finalement

$$| e_k | \leq \mathrm{eps} \cdot e_k$$

Analyse active de l'erreur - La conclusion

La relation

$$| e_k | \leq | e_{k-1} | + \text{eps} \cdot | x_k | + \text{eps} \cdot | m(s_k) |$$

s'écrit aussi

$$| e_k | \leq | e_{k-1} | + \text{eps} \cdot (| x_k | + | m(s_k) |) \text{ avec } e_0 = 0$$

On a donc finalement

$$| e_k | \leq \text{eps} \cdot e_k$$

ce qui permet d'écrire l'erreur sous la forme

$$| x \oplus y - m(x \oplus y) | \leq \text{eps} \cdot | m(x \oplus y) |$$

Quand tout s'écroule : Le préconditionnement

Soit le système linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

Si la matrice $\mathbf{A}$ est mal conditionnée, il faut, avant de résoudre le système, effectuer un **préconditionnement** de la matrice $\mathbf{A}$ afin que la matrice résultante après cette opération soit mieux conditionnée.

Préconditionnement d'une matrice – Une technique

Soit le système $\mathbf{A}_0\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $\mathbf{A}_0$ matrice mal conditionnée.

Préconditionnement d'une matrice – Une technique

Soit le système $\mathbf{A}_0\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $\mathbf{A}_0$ matrice mal conditionnée.

Soit l'inverse $\mathbf{B}_0$ de cette matrice et la quantité $\|\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{B}_0 - \mathbf{I}\|$ supérieure à un seuil donné, $\Rightarrow$ l'inversion s'est mal deroulée.

Préconditionnement d'une matrice – Une technique

Soit le système $\mathbf{A}_0\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $\mathbf{A}_0$ matrice mal conditionnée.
Soit l'inverse $\mathbf{B}_0$ de cette matrice et la quantité $\|\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{B}_0 - \mathbf{I}\|$ supérieure à un seuil donné, $\Rightarrow$ l'inversion s'est mal deroulée.
On construit le système préconditionné $\mathbf{B}_0\mathbf{A}_0\mathbf{x} = \mathbf{B}_0\mathbf{b}$
qui est équivalent au système initial.

Préconditionnement d'une matrice – Une technique

Soit le système $\mathbf{A}_0\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $\mathbf{A}_0$ matrice mal conditionnée.
Soit l'inverse $\mathbf{B}_0$ de cette matrice et la quantité $\|\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{B}_0 - \mathbf{I}\|$ supérieure à un seuil donné, $\Rightarrow$ l'inversion s'est mal deroulée.
On construit le système préconditionné $\mathbf{B}_0\mathbf{A}_0\mathbf{x} = \mathbf{B}_0\mathbf{b}$
qui est équivalent au système initial.
On pose $\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_0\mathbf{A}_0$ et on obtient $\mathbf{A}_1\mathbf{x} = \mathbf{B}_0\mathbf{b}$

Préconditionnement d'une matrice – Une technique

Soit le système $\mathbf{A}_0\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $\mathbf{A}_0$ matrice mal conditionnée.
Soit l'inverse $\mathbf{B}_0$ de cette matrice et la quantité $\|\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{B}_0 - \mathbf{I}\|$ supérieure à un seuil donné, $\Rightarrow$ l'inversion s'est mal deroulée.
On construit le système préconditionné $\mathbf{B}_0\mathbf{A}_0\mathbf{x} = \mathbf{B}_0\mathbf{b}$
qui est équivalent au système initial.
On pose $\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_0\mathbf{A}_0$ et on obtient $\mathbf{A}_1\mathbf{x} = \mathbf{B}_0\mathbf{b}$
Si $\mathbf{B}_0$ est régulière, on peut calculer l'inverse de $\mathbf{A}_1$ et soit $\mathbf{B}_1$ cette matrice inverse.

Préconditionnement d'une matrice – Une technique

Soit le système $\mathbf{A}_0\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $\mathbf{A}_0$ matrice mal conditionnée.
Soit l'inverse $\mathbf{B}_0$ de cette matrice et la quantité $\|\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{B}_0 - \mathbf{I}\|$ supérieure à un seuil donné, $\Rightarrow$ l'inversion s'est mal deroulée.
On construit le système préconditionné $\mathbf{B}_0\mathbf{A}_0\mathbf{x} = \mathbf{B}_0\mathbf{b}$
qui est équivalent au système initial.
On pose $\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_0\mathbf{A}_0$ et on obtient $\mathbf{A}_1\mathbf{x} = \mathbf{B}_0\mathbf{b}$
Si $\mathbf{B}_0$ est régulière, on peut calculer l'inverse de $\mathbf{A}_1$ et soit $\mathbf{B}_1$ cette matrice inverse.
Ainsi le produit $\mathbf{B}_1\mathbf{B}_0$ est une nouvelle approximation de l'inverse de $\mathbf{A}_0$.

Préconditionnement d'une matrice – Une technique

Soit le système $\mathbf{A}_0\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $\mathbf{A}_0$ matrice mal conditionnée.

Soit l'inverse $\mathbf{B}_0$ de cette matrice et la quantité $\|\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{B}_0 - \mathbf{I}\|$ supérieure à un seuil donné, $\Rightarrow$ l'inversion s'est mal deroulée.

On construit le système préconditionné $\mathbf{B}_0\mathbf{A}_0\mathbf{x} = \mathbf{B}_0\mathbf{b}$
qui est équivalent au système initial.

On pose $\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_0\mathbf{A}_0$ et on obtient $\mathbf{A}_1\mathbf{x} = \mathbf{B}_0\mathbf{b}$

Si $\mathbf{B}_0$ est régulière, on peut calculer l'inverse de $\mathbf{A}_1$ et soit $\mathbf{B}_1$ cette matrice inverse.

Ainsi le produit $\mathbf{B}_1\mathbf{B}_0$ est une nouvelle approximation de l'inverse de $\mathbf{A}_0$.

Si cette approximation n'est pas bonne, nous pouvons continuer en calculant une nouvelle matrice $\mathbf{B}_2$ qui est l'inverse de la matrice $\mathbf{A}_2 = \mathbf{B}_1\mathbf{B}_0\mathbf{A}_0$ et ainsi de suite.

Préconditionnement d'une matrice – Une technique

Soit le système $\mathbf{A}_0\mathbf{x} = \mathbf{b}, \ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $\mathbf{A}_0$ matrice mal conditionnée.
Soit l'inverse $\mathbf{B}_0$ de cette matrice et la quantité $\|\mathbf{A}_0{\cdot}\mathbf{B}_0 - \mathbf{I}\|$ supérieure à un seuil donné, $\Rightarrow$ l'inversion s'est mal deroulée.
On construit le système préconditionné $\mathbf{B}_0\mathbf{A}_0\mathbf{x} = \mathbf{B}_0\mathbf{b}$
qui est équivalent au système initial.
On pose $\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_0\mathbf{A}_0$ et on obtient $\mathbf{A}_1\mathbf{x} = \mathbf{B}_0\mathbf{b}$
Si $\mathbf{B}_0$ est régulière, on peut calculer l'inverse de $\mathbf{A}_1$ et soit $\mathbf{B}_1$ cette matrice inverse.
Ainsi le produit $\mathbf{B}_1\mathbf{B}_0$ est une nouvelle approximation de l'inverse de $\mathbf{A}_0$.
Si cette approximation n'est pas bonne, nous pouvons continuer en calculant une nouvelle matrice $\mathbf{B}_2$ qui est l'inverse de la matrice $\mathbf{A}_2 = \mathbf{B}_1\mathbf{B}_0\mathbf{A}_0$ et ainsi de suite.
Nous obtenons ainsi la suite des matrices régulières $\mathbf{B}_i$ telles que :
$\mathbf{B}_k\mathbf{B}_{k-1}\cdots\mathbf{B}_1\mathbf{B}_0 \simeq \mathbf{A}_0^{-1}$

Préconditionnement d'une matrice – Une technique

Soit le système $\mathbf{A}_0\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $\mathbf{A}_0$ matrice mal conditionnée.
Soit l'inverse $\mathbf{B}_0$ de cette matrice et la quantité $\|\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{B}_0 - \mathbf{I}\|$ supérieure à un seuil donné, $\Rightarrow$ l'inversion s'est mal deroulée.
On construit le système préconditionné $\mathbf{B}_0\mathbf{A}_0\mathbf{x} = \mathbf{B}_0\mathbf{b}$
qui est équivalent au système initial.
On pose $\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_0\mathbf{A}_0$ et on obtient $\mathbf{A}_1\mathbf{x} = \mathbf{B}_0\mathbf{b}$
Si $\mathbf{B}_0$ est régulière, on peut calculer l'inverse de $\mathbf{A}_1$ et soit $\mathbf{B}_1$ cette matrice inverse.
Ainsi le produit $\mathbf{B}_1\mathbf{B}_0$ est une nouvelle approximation de l'inverse de $\mathbf{A}_0$.
Si cette approximation n'est pas bonne, nous pouvons continuer en calculant une nouvelle matrice $\mathbf{B}_2$ qui est l'inverse de la matrice $\mathbf{A}_2 = \mathbf{B}_1\mathbf{B}_0\mathbf{A}_0$ et ainsi de suite.
Nous obtenons ainsi la suite des matrices régulières $\mathbf{B}_i$ telles que :
$\mathbf{B}_k\mathbf{B}_{k-1}\cdots\mathbf{B}_1\mathbf{B}_0 \simeq \mathbf{A}_0^{-1}$
Si la matrice inverse obtenue est « assez proche » de $\mathbf{A}^{-1}$, on arrête les itérations.