EISTI - DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES

ANALYSE NUMÉRIQUE - EXERCICES DE RÉVISION

29 mai 2011

Exercice 1

Dans cet exercice, on suppose que les calculs effectués par la machine ne provoquent ni overflow ni underflow et qu'ils se font selon la norme IEEE-754.

On cherche à calculer la fonction

$$f(y) = \sqrt{1+y} - \sqrt{1-y}; y \in \left]-1,1\right[$$

(1) Calculer le nombre-condition de f. Conclusion.

(2) Donner un algorithme pour le calcul de f et évaluer l'erreur de calcul Δf selon cet algorithme.

(3) Montrer que $\Delta f \leq A + +4 \cdot eps$ où A une quantité positive que vous préciserez.

(4) En utilisant les résultats des questions 1 et 3, faire une synthèse concernant le calcul numérique de la fonction $f(y)$. En particulier proposer une autre façon de calculer cette fonction afin d'éviter d'éventuels problèmes numériques.

Exercice 2

Lors de la factorisation **LU** d'une matrice regulière $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, on trouve, à cause des erreurs d'arrondi, deux matrices $\mathbf{L}'$ et $\mathbf{U}'$ telles que $\mathbf{L}' \cdot \mathbf{U}' = \mathbf{A}+\mathbf{E}$. On résout donc le système : $(\mathbf{A}+\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{b}$ au lieu de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(1) On suppose que $\left\| \mathbf{A}^{-1} \right\| \left\| \mathbf{E} \right\| < 0.5$ où $\|\bullet\|$ norme subordonnée telle que $\|\mathbf{I}\| = 1$. Montrer que la matrice $\mathbf{A}+\mathbf{E}$ est régulière.

(2) On construit la suite

   (a) $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$

   (b) $(\mathbf{A}+\mathbf{E})(\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)) = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}(k); k > 0$

   On note $\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}$ l'erreur à l'étape k. Montrer que

$$\mathbf{e}(k+1) = \left[\mathbf{I} - (\mathbf{A}+\mathbf{E})^{-1}\mathbf{A}\right]\mathbf{e}(k)$$

(3) En déduire que l'algoritme converge.

Exercice 3

Soit **A** la matrice symétrique définie positive associée à une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

(1) Montrez que les valeurs propres de **A** sont strictement positives.

(2) Quel est le conditionnement de **A** ?

(3) Soit $\mathbf{b}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrez que le système linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ admet une solution unique (que l'on note $\mathbf{x}^*$). Vérifier que l'algorithme itératif suivant permet de calculer la solution de ce système :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &\in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{x}(k) - \alpha \mathbf{g}(k) \end{aligned}$$

avec $\mathbf{g}(k) = \mathbf{Ax}(k) - \mathbf{b}$ et $\alpha = \frac{1}{\lambda_1}$, où λ_1 est la plus grande valeur propre de $\mathbf{A}$.

Exercice 4

Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et deux sous-espaces complémentaires X et Y avec $\dim X = r$, $\dim Y = n-r$ et $X \oplus Y = \mathbb{R}^n$. Soit $B_X = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r\}$ et $B_Y = \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{n-r}\}$ bases pour X et Y respectivement ce qui signifie que $B = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{n-r}\}$ est une base pour $\mathbb{R}^n$. Soit un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ Montrer que nous pouvons calculer la projection $\mathbf{v}_X = \mathbf{Pv}$ de $\mathbf{v}$ dans X à l'aide de l'algorithme

(1) calculer la solution $\mathbf{z}$ du système $\mathbf{Bz} = \mathbf{v}$

(2) partager le vecteur $\mathbf{z} = \left| \begin{array}{c} \mathbf{z}_r \\ \mathbf{z}_{n-r} \end{array} \right]$

(3) $\mathbf{v}_X = \mathbf{Pv} = \mathbf{z}_r$.

Exercice 5

Soit le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Sa solution calculée est $\mathbf{x}^*$ et le résidu $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}^*$. Si $|\mathbf{r}|_2 < 10^{-t}$ est-ce que $\mathbf{x}^*$ est identique à la solution exacte pour les premiers t digits ? Justifier votre réponse.