Correction des exercices du chapitre 5

Exercice 5.1

Soit A une matrice symétrique et U une matrice unitaire telle que

$$U^{-1}AU = diag(\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n)$$

Supposons que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$. Montrer que

$$\lambda_1 = \max_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x}, \lambda_n = \min_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x}$$

De plus, si A est définie positive montrer que toutes ses valeurs propres sont positives.

SOLUTION : Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormale de vecteurs propres de A associée aux valeurs propres λ_j respectivement.Alors

$$\forall x, x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$$

Notons

$$r_A(x) = \frac{x^T A x}{x^T x}$$

Alors

$$r_A(x) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2}$$

De la relation entre les valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$, on déduit

$$\lambda_1 \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2 \leq \lambda_n \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

donc en divisant :

$$\lambda_1 \leq \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2} = r_A(x) \leq \lambda_n$$

Si on choisit $x = e_1$ alors on atteint la borne supérieure :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2} = \lambda_1$$

Si on choisit $x = e_n$ alors on atteint la borne inférieure :

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0} \frac{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2}{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} = \lambda_n$$

Si A est définie positive alors $\forall x,\ x^T A x \geq 0$ donc $r_A(x) \geq 0$, son minimum est donc positif ou nul, soit $0 \leq \lambda_n$, or $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ donc

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n \geq 0$$

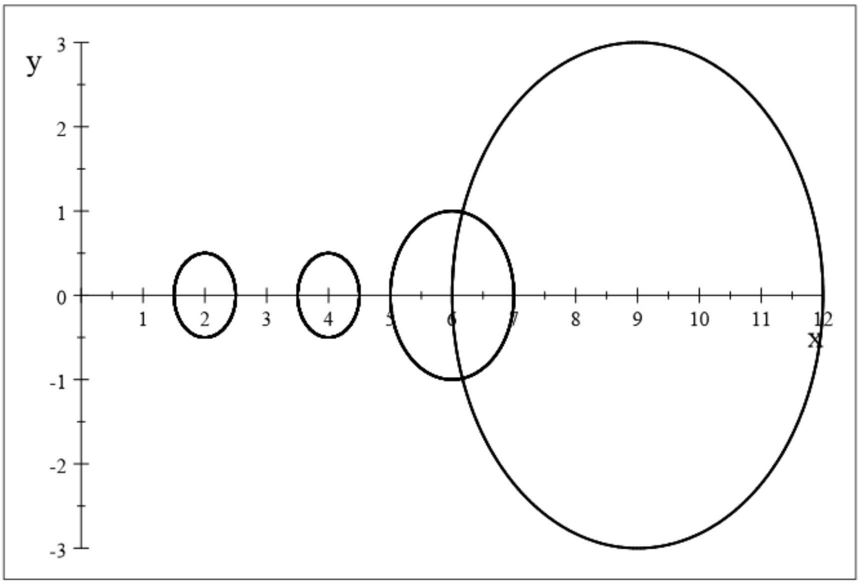
Toutes les valeurs propres sont donc positives.

Exercice 5.2

En utilisant les disques de Gershgorin, donner une estimation du nombre maximal de valeurs propres complexes des matrices suivantes :

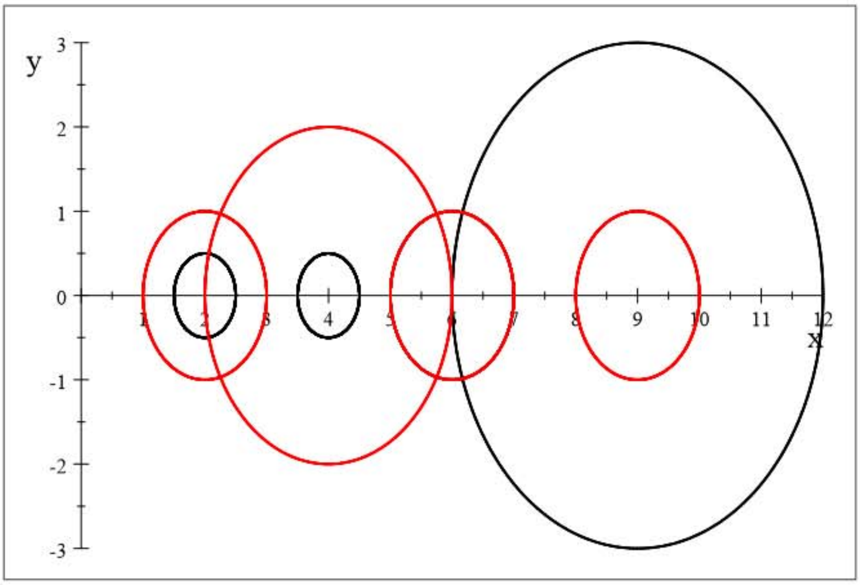
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ -1/2 & 0 & 6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 3 \end{bmatrix}$$

SOLUTION : Comme A est à coefficients réels, si λ est valeur propre, son complexe conjugué l'est aussi. Noter que dans cette situation , les valeurs propres conjuguées appartiennent au même disque de Gershgorin. La matrice A présente 2 disques colonnes isolés des autres car on a :



Chacun d'eux ne peut contenir qu'une valeur propre, celle-ci est donc réelle (puisque étant unique, elle est égale à son conjugué). Ainsi A admet au moins deux valeurs propres réelles, et donc au plus 2 complexes.

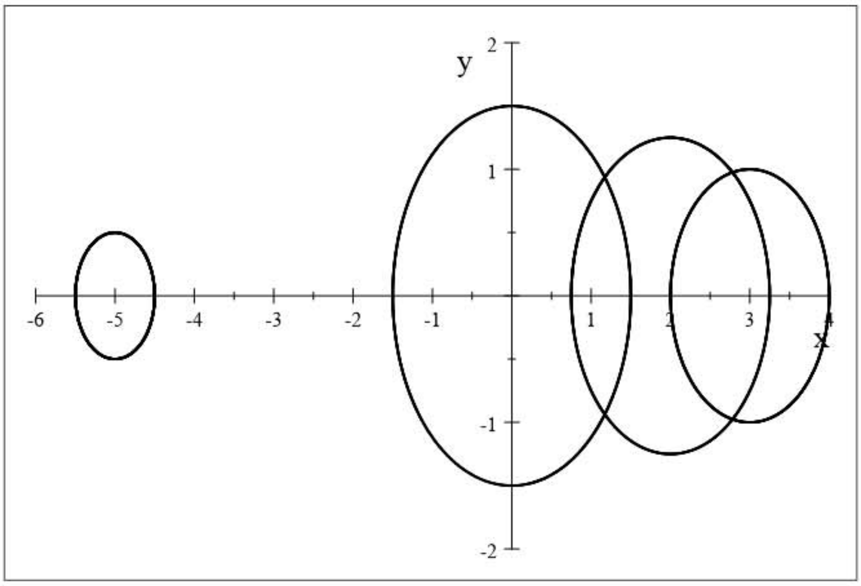
Si on regarde les disques lignes de A, on a (en rouge)



Le cercle centré en 9 contient donc lui aussi une valeur propre, qui est donc réelle, distincte des deux précédentes, également réelles, donc on trouve 3 valeurs réelles sur 4, donc la 4ième est forcément réelle.

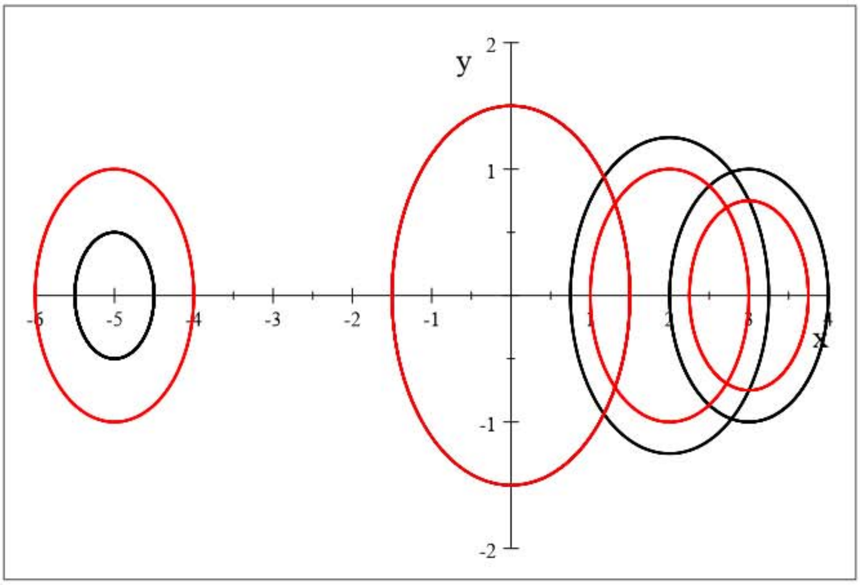
Du fait que les valeurs sont toutes réelles, on peut même dire que la plus petite est au minimum égale à 1,5, et la plus grande au maximum 10, donc le conditionnement est majoré par $20/3$.

Pour ce qui est de la matrice B, les cercles colonnes donnent :



donc on a un seul cercle isolé dans lequel se trouve une valeur propre. Il peut donc y avoir deux valeurs complexes conjuguées et une réelle.

Là inutile d'aller plus loin : si on regarde les cercles lignes (en rouge), on n'en tire rien de plus :



Exercice 5.3 : traité en TD

Soit l'application linéaire A : $^3 \rightarrow$ ^{3} définie sur les vecteurs de la base canonique par les relations :

$$\begin{aligned} A(e_1) &= 2e_1 + 6e_2 \\ A(e_2) &= -e_2 \\ A(e_3) &= e_1 + e_3 \end{aligned}$$

où e_i est le ième vecteur de la base canonique

1. Ecrire la matrice de l'application linéaire A dans la base $\mathcal{B}$.

2. Déterminer $Ker(\quad)$ et $\mathrm{Im}(\quad)$ ainsi que leurs dimensions.

3. Montrer que les vecteurs

$$\begin{aligned} f_1 &= e_2 \\ f_2 &= e_1 + 2e_2 \\ f_3 &= -e_1 - 3e_2 + e_3 \end{aligned}$$

   forment une nouvelle base $\mathcal{B}'$.

4. Ecrire la matrice de l'application linéaire dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$.

SOLUTION :

1. La matrice est :

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. $Ker(\quad)$ est l'ensemble des vecteurs (x, y, z) vérifiant :

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ 6x - y = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

donc

$$Ker(\quad) = \{(0, 0, 0)\}$$

et

$$\dim Ker(\quad) = 0$$

Du théorème du rang on déduit :

$$\dim \mathrm{Im}(\quad) = 3$$

donc

$$\mathrm{Im}(\quad) = \quad {}^3$$

3. On calcule le déterminant de la famille de vecteurs :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

donc la famille est libre. Etant une famille de trois vecteurs dans un espace de dimension 3, elle est forcéement une base.

4. La matrice de passage de l'ancienne à la nouvelle base est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dont on peut calculer l'inverse :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et qui donne la matrice de l'application linéaire dans la nouvelle base :

$$\quad = P^{-1} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On remarque que le vecteur f_3 n'est pas un vecteur propre de la matrice puisque $\quad f_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ n'est pas proportionnel à f_3. Par conséquent la matrice n'est pas la forme diagonale de $\quad$, comme certains auraient pu le croire !

Exercices 5.4 : traité en TD

Soit la matrice
$$=\begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,4\,6\end{pmatrix}$$

1. Déterminer les quatre espaces associés à et préciser leur base.

2. En utilisant la réponse à la question précédente, expliquer pourquoi le système $=$, avec $=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ n'a pas de solution. Trouver le vecteur $'$ le plus proche de pour llequel le système a une solution.

SOLUTION :

1. Remarquons tout d'abord que la matrice indique que l'application linéaire correspondante va de ^{3} dans ^{2}.

   Les espaces recherchés vérifient :

$$\begin{aligned} Ker(\ ) \oplus \mathrm{Im}\,(\ ^T) &= \ ^3\\ \mathrm{Im}\ \ \oplus Ker\,(\ ^T) &= \ ^2 \end{aligned}$$

   Les lignes de la matrice sont proportionnelles donc $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in Ker(\ ) \Leftrightarrow x+2y+3z = 0 \Leftrightarrow x=-2y-3z \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2y-3z\\y\\z\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$ donc $Ker(\ ) = Vect(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix})$. On en déduit $\dim Ker(\ ) = 2$.

   Par conséquent $\dim \mathrm{Im}\,(\ ^T) = 1$. Comme

$$=\begin{pmatrix}1\,2\\2\,4\\3\,6\end{pmatrix}$$

   on voit facilement que

$$\mathrm{Im}\,(\ ^T) = Vect(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix})$$

   puisque les deux vecteurs colonnes de la matrice sont proportionnels.

   De , on déduit aussi que

$$Ker(\ \ ) = Vect(\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix})$$

ce qui correspond au fait que

$$\mathrm{Im}(\quad) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$$

du fait que $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

2. Le système $\quad = \quad$ n'admet pas de solution car $\quad \notin \mathrm{Im}(\quad)$. Le plus proche vecteur qui permet de résoudre le système est $\ '$, projeté de $\quad$ sur $\mathrm{Im}(\quad)$. On vérifie facilement que $\ = \ ' + \ $ où $\ ' \in \mathrm{Im}(\quad)$ et $\ \in \mathrm{Im}(\quad)^{\perp} = Ker(\quad)$. On en tire

$$.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \ '.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \| \ '\|.\sqrt{5}.\cos(\ ', v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1$$

où v désigne $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, vecteur directeur de $\mathrm{Im}(\quad)$. $\cos(b', v)$ est égal à 1 ou à -1 puisque $\ '$ et v sont colinéaires, il est du signe de $\ .\ $, qui est négatif, donc $\cos(b', v) = -1$ On en tire

$$\| \ '\| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

or $\ '$ est proportionnel à v donc, sachant que $\cos(b', v) = -1$,

$$' = -\| \ '\| \frac{v}{\|v\|} = \frac{-1}{\sqrt{5}}.\frac{v}{\sqrt{5}} = \frac{-1}{5}v = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.5.

Soit l'espace vectoriel E qui est formé par toutes les combinaisons linéaires des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 définies par :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= ch(2x) \\ f_2(x) &= sh(2x) \\ f_3(x) &= ch(5x) \\ f_4(x) &= sh(5x) \end{aligned}$$

Considérons l'application

$$T(f) = f'' - 3f' - 10f$$

1. Montrer que T est une application linéaire de E dans $\dot{E}$.
2. Déterminer la représentation matricielle de T par rapport à la base (f_1, f_2, f_3, f_4).
3. Déterminer le noyau de T.

SOLUTION :

1. $\forall \alpha, \beta \in \quad, \forall f, g \in E$, $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$ du fait de la linéarité de la dérivation.

2. $Tf_1(x) = ch''2x - 3ch'2x - 10ch(2x) = 4ch(2x) - 6sh(2x) - 10ch(2x) = -6ch(2x) - 6sh(2x) = -6f_1(x) - 6f_2(x)$
   $Tf_2(x) = sh''2x - 3sh'2x - 10sh(2x) = 4sh(2x) - 6ch(2x) - 10sh(2x) = -6ch(2x) - 6sh(2x) = -6f_1(x) - 6f_2(x)$
   $Tf_3(x) = ch''5x - 3ch'5x - 10ch(5x) = 25ch(5x) - 15sh(5x) - 10ch(5x) = 15ch(5x) - 15sh(5x) = 15f_3(x) - 15f_4(x)$
   $Tf_4(x) = sh''5x - 3sh'5x - 10sh(5x) = 25sh(5x) - 15ch(5x) - 10sh(5x) = 15sh(5x) - 15ch(5x) = 15f_4(x) - 15f_3(x)$
   On obtient
$$T = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & -15 \\ 0 & 0 & -15 & 15 \end{pmatrix}$$

3. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in Ker(T) \Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 6y = 0 \\ 15z - 15t = 0 \\ -15z + 15t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ t \\ t \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $Ker(T) = Vect(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Exercice 5.9.
Montrer que le vecteur $x^* = A^+ y$ satisfait à
$$\|Ax - y\|_2 \geq \|Ax^* - y\|_2, \forall x \in {}^n$$
De plus
$$\text{si } \|Ax - y\|_2 = \|Ax^* - y\|_2 \text{ et } x^* \neq x, \text{ alors } \|x\|_2 > \|x^*\|_2$$
SOLUTION :
De la construction du pseudo inverse et des conditions de Moore Penrose, on déduit que le seudo inverse A^+ vérifie
$$AA^+ = Q$$
où Q est la projection orthogonale dans $\mathrm{Im}(A)$.
Donc $\forall x \in {}^n, \forall y \in {}^n$
$$Ax - y = u + v \text{ avec } u \in \mathrm{Im}(A), v \in (\mathrm{Im}(A))^\perp$$
et on a aussi
$$Qu = u = Q(Ax - y) = AA^+(Ax - y) = A\left(A^+Ax - A^+y\right) = A(Px - A^+y)$$
où P est la projection orthogonale dans $(Ker(A))^\perp = \mathrm{Im}(A^T)$ donc (voir ci-dessous) $Px = x$. On a donc
$$u = A(x - A^+y) \in \mathrm{Im}(A)$$

De plus

$$\begin{aligned} v &= Ax - y - u = Ax - y - A(x - A^+y) \\ &= AA^+y - y = Ax^* - y \end{aligned}$$

et $v \in (\mathrm{Im}(A))^\perp$.

Donc $\forall x \in \ {}^n$

$$\|Ax - y\|_2^2 = \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2$$

(on applique le théorème de Pythagore car u et v sont orthogonaux) d'où

$$\|Ax - y\|_2^2 = \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2 \geq \|v\|_2^2 = \|Ax^* - y\|_2^2$$

L'égalité $\|Ax - y\|_2 = \|Ax^* - y\|_2$ a lieu quand $Ax = Ax^* = AA^+y$ soit $A^+Ax = A^+Ax^* = A^+AA^+y = A^+y \Leftrightarrow Px = A^+y = x^*$ or $Px = x$ donc $x = x^*$.

Si ce n'est pas le cas ($x^* \neq x$) alors soit $x \in \ {}^n$ tel que

$$Ax = y = Qy = AA^+y$$

car Q est la projection orthogonale dans $\mathrm{Im}(A)$. Or

$$x = u_x + v_x$$

avec $u_x \in (Ker(A))^\perp$ et $v_x \in Ker(A)$. Soit

$$\begin{aligned} u_x &= Px = A^+Ax = A^+AA^+y = A^+y = x^* \in (Ker(A))^\perp \\ \text{donc } v_x &= x - x^* \in Ker(A) \end{aligned}$$

Donc

$$\|x\|_2^2 = \|x^* + (x - x^*)\|_2^2 = \|x^*\|_2^2 + \|x - x^*\|_2^2 > \|x^*\|_2^2$$

car $\|x - x^*\|_2^2 = \|v_x\|_2^2 \neq 0$.

Démonstration du fait que si P est la projection orthogonale dans $(Ker(A))^\perp = \mathrm{Im}(A^T)$ alors $Px = x$.

SOLUTION : $(Ker(A))^\perp \oplus Ker(A) = \ {}^n$ donc $\forall x \in \ {}^n$, on a $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in Ker(A), x_2 \in (Ker(A))^\perp$. De ce fait

$$\begin{aligned} Px &= Px_1 + Px_2 \\ &= 0 + x_2 = x_2 \end{aligned}$$

Donc il suffit de remplacer x par $\tilde{x} = x - x_1 = x_2$ dès le départ, et on aura $P\tilde{x} = Px - Px_1 = Px_2 = x_2 = x - x_1 = \tilde{x}$. Cela ne change rien puisque $A\tilde{x} = Ax - Ax_1 = Ax$ car $x_1 \in Ker(A)$, ce qui signifie que x et $\tilde{x}$ vérifient tous deux $Ax = y$.