Ing1 2010-2011
Analyse Numérique

Correction des exercices des chapitre 2 et 3 - Fascicule 3

Exercice 2.3 : traité en TD

Soit l'application linéaire $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie sur les vecteurs de la base canonique par les relations :

$$\begin{aligned} A(e_1) &= 2e_1 + 6e_2 \\ A(e_2) &= -e_2 \\ A(e_3) &= e_1 + e_3 \end{aligned}$$

où e_i est le ième vecteur de la base canonique

1. Ecrire la matrice $\mathbf{A}$ de l'application linéaire A dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer $Ker(\mathbf{A})$ et $\mathrm{Im}(\mathbf{A})$ ainsi que leurs dimensions.
3. Montrer que les vecteurs

$$\begin{aligned} f_1 &= e_2 \\ f_2 &= e_1 + 2e_2 \\ f_3 &= -e_1 - 3e_2 + e_3 \end{aligned}$$

   forment une nouvelle base $\mathcal{B}'$.
4. Ecrire la matrice de l'application linéaire dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$.

SOLUTION :

1. La matrice est :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. $Ker(\mathbf{A})$ est l'ensemble des vecteurs (x, y, z) vérifiant :

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ 6x - y = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

donc

$$Ker(\mathbf{A}) = \{(0,0,0)\}$$

et

$$\dim Ker(\mathbf{A}) = 0$$

Du théorème du rang on déduit :

$$\dim \mathrm{Im}(\mathbf{A}) = 3$$

donc

$$\mathrm{Im}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^3$$

3. On calcule le déterminant de la famille de vecteurs :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

donc la famille est libre. Etant une famille de trois vecteurs dans un espace de dimension 3, elle est forcéement une base.

4. La matrice de passage de l'ancienne à la nouvelle base est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

, dont on peut calculer l'inverse :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et qui donne la matrice de l'application linéaire dans la nouvelle base :

$$\mathbf{B} = P^{-1}\mathbf{A}P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que la matrice $\mathbf{B}$ est la forme diagonale de $\mathbf{A}$, et donc la base fournie est la base de vecteurs propres.

Exercices 2.4 : non traité en TD

Soit la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les quatre espaces associés à $\mathbf{A}$ et préciser leur base.

2. En utilisant la réponse à la question précédente, expliquer pourquoi le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, avec $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ n'a pas de solution. Trouver le vecteur $\mathbf{b}'$ le plus proche de $\mathbf{b}$ pour lequel le système a une solution.

SOLUTION :

1. Remarquons tout d'abord que la matrice indique que l'application linéaire correspondante va de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

   Les espaces recherchés vérifient :

$$Ker(\mathbf{A}) \oplus \operatorname{Im}\left(\mathbf{A}^T\right) = \mathbb{R}^3$$
$$\operatorname{Im}\mathbf{A} \oplus Ker\left(\mathbf{A}^T\right) = \mathbb{R}^2$$

   Les lignes de la matrice sont proportionnelles donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(\mathbf{A}) \Leftrightarrow x + 2y + 3z = 0 \Leftrightarrow x = -2y - 3z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y-3z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $Ker(\mathbf{A}) = Vect(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$. On en déduit $\dim Ker(\mathbf{A}) = 2$.

   Par conséquent $\dim \operatorname{Im}\left(\mathbf{A}^T\right) = 1$. Comme

$$\mathbf{A} \quad = \begin{pmatrix} 1\,2 \\ 2\,4 \\ 3\,6 \end{pmatrix}$$

   on voit facilement que

$$\operatorname{Im}\left(\mathbf{A}^T\right) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix})$$

   puisque les deux vecteurs colonnes de la matrice sont proportionnels.

   De $\mathbf{A}$, on déduit aussi que

$$Ker(\mathbf{A} \quad) = Vect(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix})$$

   ce qui correspond au fait que

$$\operatorname{Im}(\mathbf{A}) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$$

   du fait que $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

2. Le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ n'admet pas de solution car $\mathbf{b} \notin \mathrm{Im}(\mathbf{A})$. Le plus proche vecteur qui permet de résoudre le système est $\mathbf{b}'$, projeté de $\mathbf{b}$ sur $\mathrm{Im}(\mathbf{A})$. On vérifie facilement que $\mathbf{b} = \mathbf{b}' + \mathbf{c}$ où $\mathbf{b}' \in \mathrm{Im}\,(\mathbf{A})$ et $\mathbf{c} \in \mathrm{Im}\,(\mathbf{A})^{\perp} = Ker(\mathbf{A}\quad)$. On en tire

$$\mathbf{b}.\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \mathbf{b}'.\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \|\mathbf{b}'\|.\sqrt{5}.\cos(\mathbf{b}', v) = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = -1$$

où v désigne $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, vecteur directeur de $\mathrm{Im}(\mathbf{A})$. $\cos(b', v)$ est égal à 1 ou à -1 puisque $\mathbf{b}'$ et v sont colinéaires, il est du signe de $\mathbf{b}.\mathbf{v}$, qui est négatif, donc $\cos(b', v) = -1$ On en tire

$$\|\mathbf{b}'\| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

or $\mathbf{b}'$ est proportionnel à v donc, sachant que $\cos(b', v) = -1$,

$$\mathbf{b}' = -\|\mathbf{b}'\|\frac{v}{\|v\|} = \frac{-1}{\sqrt{5}}.\frac{v}{\sqrt{5}} = \frac{-1}{5}v = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Exercice supplémentaire pour s'entrainer.

Soit l'espace vectoriel E qui est formé par toutes les combinaisons linéaires des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 définies par :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= ch(2x) \\ f_2(x) &= sh(2x) \\ f_3(x) &= ch(5x) \\ f_4(x) &= sh(5x) \end{aligned}$$

Considérons l'application

$$T(f) = f'' - 3f' - 10f$$

1. Montrer que T est une application linéaire de E dans $\dot{E}$.

2. Déterminer la représentation matricielle de T par rapport à la base (f_1, f_2, f_3, f_4).

3. Déterminer le noyau de T.

SOLUTION :

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g \in E$, $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$ du fait de la linéarité de la dérivation.

2. $Tf_1(x) = ch''2x - 3ch'2x - 10ch(2x) = 4ch(2x) - 6sh(2x) - 10ch(2x) = -6ch(2x) - 6sh(2x) = -6f_1(x) - 6f_2(x)$
$Tf_2(x) = sh''2x - 3sh'2x - 10sh(2x) = 4sh(2x) - 6ch(2x) - 10sh(2x) = -6ch(2x) - 6sh(2x) = -6f_1(x) - 6f_2(x)$
$Tf_3(x) = ch''5x - 3ch'5x - 10ch(5x) = 25ch(5x) - 15sh(5x) - 10ch(5x) = 15ch(5x) - 15sh(5x) = 15f_3(x) - 15f_4(x)$
$Tf_4(x) = sh''5x - 3sh'5x - 10sh(5x) = 25sh(5x) - 15ch(5x) - 10sh(5x) = 15sh(5x) -$

$15ch(5x) = 15f_4(x) - 15f_3(x)$
On obtient

$$T = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & -15 \\ 0 & 0 & -15 & 15 \end{pmatrix}$$

3. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in Ker(T) \Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 6y = 0 \\ 15z - 15t = 0 \\ -15z + 15t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ t \\ t \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +$
$t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $Ker(T) = Vect(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Exercice 2.5 : traité en TD

Utiliser la DVS pour calculer l'inverse d'une matrice régulière. Si au moins l'une des valeurs singulières est nulle, que peut-on conclure pour l'inversion de la matrice.

SOLUTION :

D'après le thorème sur la DVS on a :

Pour $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, il existe $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonales telles que $A = U\Delta V^T$.

Dans le cas où la matrice A est régulière, on a forcément $n = m$ donc U et V sont carrées de mm taille, soit $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonales (donc inversibles) telles que $A = U\Delta V^T$. Dans ce cas la matrice Δ est aussi de taille n et admet donc une diagonale (au sens vraie diagonale).

On peut donc écrire $A^{-1} = \left(U\Delta V^T\right)^{-1} = \left(V^T\right)^{-1} \Delta^{-1} U^{-1} = V\Delta^{-1}U^T$. Comme Δ est diagonale, il suffit pour la calculer d'inverser ses éléments diagonaux un par un.

Si au moins l'une des valeurs singulières est nulle, alors la matrice Δ n'est pas inversible. On peut donc en conclure que la matrice A non plus, car elle admet une valeur propre nulle.

Exercice 2.6: traité en TD

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Calculer sa DVS.

SOLUTION :

On remarque tout d'abord que la matrice A a un déterminant nul, elle n'est donc pas inversible au sens classique.

1. Calcul de AA^T puis de U

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0 & 4.0 \\ 4.0 & 8.0 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres sont 0 et 10 car :

$$\det(AA^T - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2.0-\lambda & 4.0 \\ 4.0 & 8.0-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(8-\lambda) - 16$$
$$= \lambda^2 - 10\lambda = \lambda(\lambda - 10)$$

On en déduit les vecteurs propres :

- $AA^Tu = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + 2y = 0 \Leftrightarrow x = -2y \Leftrightarrow u = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur normalisé correspondant est $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $AA^Tu = 10u \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+4y \\ 4x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x \\ 10y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -8x+4y \\ 4x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ $2x - y = 0 \Leftrightarrow y = 2x$ donc $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le vecteur normalisé correspondant est $u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

On a donc

$$U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

car il faut ranger les colonnes par ordre décroissant des valeurs propres.
N.B. : pour éviter les erreurs, il est préférable de numéroter les valeurs propres par ordred décroissant (en valeur absolue).

2. Calcul de A^TA puis de V

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres sont 0 et 10 car :

$$\det(A^TA - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 5 \\ 5 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)(5-\lambda) - 25$$
$$= \lambda^2 - 10\lambda = \lambda(\lambda - 10)$$

On en déduit les vecteurs propres :

- $A^TAv = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow x = -y \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur normalisé correspondant est $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $A^TAv = 10v \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+5y \\ 5x+5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x \\ 10y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5x+5y \\ 5x-5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ $x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$ donc $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur normalisé correspondant est $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a donc

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Calcul de Δ : $\Delta = \Lambda^{1/2}$ où Λ est la matrice diagonale des valeurs propres non nulles de $A^T A$:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifions

$$\begin{aligned} \Delta &= U^T A V \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} * \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A titre indicatif la SVD trouvée par Mathlab : $\begin{bmatrix} 0.447\,21 & 0.894\,43 \\ 0.894\,43 & -0.447\,21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.\,162\,3 & 0 \\ 0 & 8.\,312 \times 10^{-39} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0.707\,11 & 0.707\,11 \\ 0.707\,11 & -0.707\,11 \end{bmatrix}$.
On remarque bien que la valeur propre nulle n'est pas déterminée exactement.

La matrice Δ trouvée par Scilab étant :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 3.1622777 & 0 \\ 0 & 1.570D - 16 \end{pmatrix}$$

ce qui n'est pas non plus tout à fait exact mais signifie aussi que les deux logiciels n'ont pas des méthodes identiques implémentées pour la SVD.

Exercice 2.7
code scilab.:

On obtient :
$rang(A) = 3, rang(B) = 2$, et $\|\Delta A\|_2 = 1$, des valeurs singulières qui permettent de calculer :

$$\left(\sum_{i=1}^{3}(\sigma_k-\tau_k)^2\right)^{1/2} = \Big[(2.1915928-2.5987215)^2+(0.5325654-0.3681513)^2+\big(0.3681269-1.156*10^{-16}\big)^2$$
$$=0.572\,98$$

Alors que parallèlement, on a $\|\Delta A\|_2 = 1$ donc la majoration est bien vérifiée.

Exercice 3.4.: non traité en TD

Montrer que le vecteur $x^* = A^+y$ satisfait à

$$\|Ax-y\|_2 \geq \|Ax^*-y\|_2 \,, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

De plus

$$\text{si } \|Ax-y\|_2 = \|Ax^*-y\|_2 \text{ et } x^* \neq x, \text{ alors } \|x\|_2 > \|x^*\|_2$$

SOLUTION :

De la construction du pseudo inverse et des conditions de Moore Penrose, on déduit que le seudo inverse A^+ vérifie

$$AA^+ = Q$$

où Q est la projection orthogonale dans $\mathrm{Im}(A)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n$

$$Ax - y = u + v \text{ avec } u \in \mathrm{Im}(A), v \in (\mathrm{Im}(A))^{\perp}$$

et on a aussi

$$Qu = u = Q\,(Ax-y) = AA^+\,(Ax-y) = A\left(A^+Ax - A^+y\right) = A(Px - A^+y)$$

où P est la projection orthogonale dans $(Ker(A))^{\perp} = \mathrm{Im}(A^T)$ donc (voir ci-dessous) $Px = x$. On a donc

$$u = A(x - A^+y) \in \mathrm{Im}(A)$$

De plus

$$\begin{aligned} v &= Ax - y - u = Ax - y - A(x - A^+y) \\ &= AA^+y - y = Ax^* - y \end{aligned}$$

et $v \in (\mathrm{Im}(A))^{\perp}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|Ax-y\|_2^2 = \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2$$

(on applique le théorème de Pythagore car u et v sont orthogonaux) d'où

$$\|Ax-y\|_2^2 = \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2 \geq \|v\|_2^2 = \|Ax^*-y\|_2^2$$

L'égalité $\|Ax-y\|_2 = \|Ax^*-y\|_2$ a lieu quand $Ax = Ax^* = AA^+y$ soit $A^+Ax = A^+Ax^* = A^+AA^+y = A^+y \Leftrightarrow Px = A^+y = x^*$ or $Px = x$ donc $x = x^*$.

Si ce n'est pas le cas ($x^* \neq x$) alors soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$Ax = y = Qy = AA^+y$$

car Q est la projection orthogonale dans $\mathrm{Im}(A)$. Or

$$x = u_x + v_x$$

avec $u_x \in (Ker(A))^\perp$ et $v_x \in Ker(A)$. Soit

$$\begin{aligned} u_x &= Px = A^+Ax = A^+AA^+y = A^+y = x^* \in (Ker(A))^\perp \\ \text{donc } v_x &= x - x^* \in Ker(A) \end{aligned}$$

Donc

$$\|x\|_2^2 = \|x^* + (x - x^*)\|_2^2 = \|x^*\|_2^2 + \|x - x^*\|_2^2 > \|x^*\|_2^2$$

car $\|x - x^*\|_2^2 = \|v_x\|_2^2 \neq 0$.

Démonstration du fait que si P est la projection orthogonale dans $(Ker(A))^\perp = \mathrm{Im}(A^T)$ alors $Px = x$.

SOLUTION : $(Ker(A))^\perp \oplus Ker(A) = \mathbb{R}^n$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^n$, on a $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in Ker(A), x_2 \in (Ker(A))^\perp$. De ce fait

$$\begin{aligned} Px &= Px_1 + Px_2 \\ &= 0 + x_2 = x_2 \end{aligned}$$

Donc il suffit de remplacer x par $\tilde{x} = x - x_1 = x_2$ dès le départ, et on aura $P\tilde{x} = Px - Px_1 = Px_2 = x_2 = x - x_1 = \tilde{x}$. Cela ne change rien puisque $A\tilde{x} = Ax - Ax_1 = Ax$ car $x_1 \in Ker(A)$, ce qui signifie que x et $\tilde{x}$ vérifient tous deux $Ax = y$.

Exercice 3.5.: traité en TD en partie

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{bmatrix}$

1. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices AA^T et A^TA
2. Calculer les quatre espaces fondamentaux associés à la matrice A
3. Calculer la pseudo-inverse de A

SOLUTION

1. Pour AA^T

   - $$AA^T = \begin{bmatrix} 1\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1\,0 \\ 1\,0 \\ 0\,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,0 \\ 0\,1 \end{bmatrix}$$

     Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 1$.

- Les vecteurs propres associés sont :
  - pour $\lambda_1 = 2$:

$$
\begin{aligned}
&\left(AA^T - 2I\right) u = 0 \\
&\qquad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = 0, x \text{ quelconque}
\end{aligned}
$$

  donc $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est normalisé
  - pour $\lambda_2 = 1$:

$$
\begin{aligned}
&\left(AA^T - I\right) u = 0 \\
&\qquad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1\,0 \\ 0\,0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 0, y \text{ quelconque}
\end{aligned}
$$

  donc $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est normalisé

  Donc on a :

$$U = \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,1 \end{pmatrix} = I$$

  On aurait pu s'en douter : si AA^T est diagonale, c'est que les valeurs propres sont sur la diagonale et que dans la base canonique on est en fait dans la base de vecteurs propres. Les calculs étaient inutiles !

Pour $A^T A$

- $$A^T A = \begin{bmatrix} 1\,0 \\ 1\,0 \\ 0\,1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,1\,0 \\ 1\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\det\left(A^T A - \lambda I\right) &= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\
&= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] \\
&= (1-\lambda)\left[1 + \lambda^2 - 2\lambda - 1\right] = (1-\lambda)\left[\lambda^2 - 2\lambda\right] \\
&= \lambda (1-\lambda) [\lambda - 2]
\end{aligned}
$$

  Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 0$.

- Les vecteurs propres associés sont :
  - pour $\lambda_1 = 2$:

$$
\begin{aligned}
&\left(A^T A - 2I\right) u = 0 \\
&\qquad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = 0, y = x
\end{aligned}
$$

donc $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est normalisé

- pour $\lambda_2 = 1$:

$\left(A^T A - I\right) u = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0\,1\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,0\,0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z \text{ quelconque}, y = x = 0$$

donc $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est normalisé

- pour $\lambda_3 = 0$:

$$\begin{aligned} \left(A^T A\right) u &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1\,1\,0 \\ 1\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = 0, y = -x \end{aligned}$$

donc $u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est normalisé

- On en déduit que

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

2. Les sous-espaces fondamentaux...on saute.

3. Calcul de Δ : $\Delta = \Lambda^{1/2}$ où Λ est la matrice diagonale des valeurs propres non nulles de $A^T A$:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\,0\,0 \\ 0\;\;1\,0 \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$\begin{aligned} \Delta &= U^T A V \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,1 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} 1\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\,0\,0 \\ 0\;\;1\,0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La pseudo inverse de A est donnée par

$$A^{+} = V^T \Delta^{-1} U$$

en utilisant la notation Δ^{-1} par abus d'écriture pour

$$\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\begin{aligned} A^+ &= V\Delta^{-1}U^T \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vérification :

$$AA^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\text{donc } AA^+A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

mais on a par exemple :

$$A^+A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I$$

ce qui différencie la pseudo-inverse de l'inverse. Par contre on a

$$A^+AA^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^+$$