# Correction Partielle Session 1

**Exercice 2 :**

Soit la fonction $f$ définie sur $]-1,1[$ par

$$f(y) = \frac{1}{1+y} - \frac{1}{1-y}$$

1. Calculer le nombre condition de $f$.

   On a

   $$\kappa_f = \left|\frac{f'(y)}{f(y)}y\right|$$

   Or

   $$\begin{aligned} f'(y) &= \frac{-1}{(1+y)^2} - \frac{1}{(1-y)^2} \\ &= -\frac{(1-y)^2+(1+y)^2}{(1-y)^2(1+y)^2} = -\frac{1-2y+y^2+1+2y+y^2}{(1-y)^2(1+y)^2} \\ &= -2\frac{1+y^2}{(1-y)^2(1+y)^2} \end{aligned}$$

   de plus

   $$\begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{1+y} - \frac{1}{1-y} \\ &= \frac{1-y-1-y}{1-y^2} = -\frac{2y}{1-y^2} \end{aligned}$$

   donc

   $$\begin{aligned} \kappa_f &= \left|-2\frac{1+y^2}{(1-y)^2(1+y)^2}\left(-\frac{1-y^2}{2y}\right)y\right| \\ &= \left|\frac{1+y^2}{(1-y)^2(1+y)^2}(1-y)(1+y)\right| = \left|\frac{1+y^2}{(1-y)(1+y)}\right| \end{aligned}$$

   On conclut que lorsque $y$ est voisin de 1 et de -1, la quantité $\kappa_f$ peut prendre de très grandes valeurs. En effet le dénominateur tend vers 0, alors que l numérateur tend vers 2 (toute forme indéterminée ne donne aucune conclusion pertinente).

2. Pour calculer $f$, on utilise l'algorithme suivant (d'autres réponses peuvent être correctes):

$x_0 = y \longmapsto \phi_1(x_0) = \begin{pmatrix} 1+y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = x_1 \longmapsto \phi_2(x_1) = \begin{pmatrix} u \\ 1-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = x_2 \longmapsto \phi_3(x_2) = \begin{pmatrix} 1/u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} = x_3 \longmapsto \phi_4(x_3) = \begin{pmatrix} w \\ 1/v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ t \end{pmatrix} = x_4 \longmapsto \phi_5(x_4) = w - t.$

Ainsi on a $\phi = \phi_5 \circ \phi_4 \circ \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1$

3. Evaluation de l'erreur

   (a) Calcul des fonctions $\Psi_k$ (ce qui reste à faire après $k$ étapes).

   $\Psi_1 = \phi_5 \circ \phi_4 \circ \phi_3 \circ \phi_2$. Les variables d'entrée de $\Psi_1$ sont celles que prend en entrée $\phi_2$. De nombreux élèves ont commis l'erreur à ce niveau là et dans toutes les fonctions $\Psi_k$, rendant de ce fait des jacobiennes absurdes.

   $\Psi_1 \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = \phi_5 \circ \phi_4 \circ \phi_3 \circ \phi_2 \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{u} - \frac{1}{1-y}$

   $\Psi_2 = \phi_5 \circ \phi_4 \circ \phi_3$ donc $\Psi_2 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \phi_5 \circ \phi_4 \circ \phi_3 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{u} - \frac{1}{v}$

   $\Psi_3 = \phi_5 \circ \phi_4$ donc $\Psi_3 \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} = \phi_5 \circ \phi_4 \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} = w - \frac{1}{v}$

   $\Psi_4 = \phi_5$donc $\Psi_4 \begin{pmatrix} w \\ t \end{pmatrix} = \phi_5 \begin{pmatrix} w \\ t \end{pmatrix} = w - t$

   (b) Calcul des matrices jacobiennes des fonctions $\Psi_k$ : on dérive par rapport à chaque variable un résultat toujours scalaire

   $J\Psi_1 \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{u^2} & -\frac{1}{(1-y)^2} \end{pmatrix}$

   $J\Psi_2 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{u^2} & \frac{1}{v^2} \end{pmatrix}$

   $J\Psi_3 \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{v^2} \end{pmatrix}$

   $J\Psi_4 \begin{pmatrix} w \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$

   Jacobienne de $\phi$ :

   $J\phi(y) = \frac{-1}{(1+y)^2} - \frac{1}{(1-y)^2}$

   (c) Calcul des matrices des erreurs $H_k$ (matrice comportant un facteur diagonal non nul sur la position de la variable modifiée à l'étape correspondante):

   $H_1 = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix}$, $H_3 = \begin{pmatrix} \eta_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $H_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta_4 \end{pmatrix}$, $H_5 = (\eta_5)$

   (d) Formule de l'erreur. Du cours on déduit :

   $$\Delta f = J\phi(y).\Delta y + J\Psi_1(x_1).H_1.x_1 + J\Psi_2(x_2).H_2.x_2 + \ldots J\Psi_{r-1}(x_{r-1}).H_{r-1}.x_{r-1} + H_r.f(y)$$

Ici on a donc

$$\begin{aligned}\Delta f &= \left(\frac{-1}{(1+y)^2} - \frac{1}{(1-y)^2}\right).\Delta y + \\ &\left(\begin{array}{cc} -\frac{1}{u^2} & -\frac{1}{(1-y)^2} \end{array}\right).\left(\begin{array}{cc} \eta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right).\left(\begin{array}{c} u \\ y \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc} -\frac{1}{u^2} & \frac{1}{v^2} \end{array}\right).\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{array}\right).\left(\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right) \\ &+ \left(\begin{array}{cc} 1 & \frac{1}{v^2} \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} \eta_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} w \\ v \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & \eta_4 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} w \\ t \end{array}\right) \\ &+ (\eta_5).\left(\frac{1}{1+y} - \frac{1}{1-y}\right)\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}\Delta f &= \left(\frac{-1}{(1+y)^2} - \frac{1}{(1-y)^2}\right).\Delta y + \\ &\eta_1\left(-\frac{1}{u^2}\right)u + \eta_2\left(\frac{1}{v^2}\right).v \\ &+\eta_3 w - \eta_4 t \\ &+ (\eta_5).\left(\frac{1}{1+y} - \frac{1}{1-y}\right)\end{aligned}$$

En revenant à la variable $y$, on obtient :

$$\begin{aligned}\Delta f &= \left(\frac{-1}{(1+y)^2} - \frac{1}{(1-y)^2}\right).\Delta y - \eta_1\frac{1}{1+y} + \eta_2\frac{1}{1-y} \\ &+\eta_3\frac{1}{1+y} - \eta_4\frac{1}{1-y} \\ &+\eta_5.\left(\frac{1}{1+y} - \frac{1}{1-y}\right)\end{aligned}$$

En majorant chaque erreur $\eta_i$ par $\varepsilon$ en valeur absolue, on tire :

$$|\Delta f| = \left|\frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1-y)^2}.\right||\Delta y| + \left[\left|\frac{1}{1+y}\right| + \left|\frac{1}{1-y}\right| + \left|\frac{1}{1+y}\right| + \left|\frac{1}{1-y}\right| + \left|\left(\frac{1}{1+y} - \frac{1}{1-y}\right)\right|\right]$$

soit

$$|\Delta f| = \left|\frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1-y)^2}.\right||\Delta y| + 3\left[\left|\frac{1}{1+y}\right| + \left|\frac{1}{1-y}\right|\right]\varepsilon$$

si on majore aussi le dernier terme.

4. Proposer une autre façon de calculer cette fonction et vérifier que le calcul est cette fois-ci bien conditionné.

   SOL : On utilise une forme sur le même dénominateur : $f(y) = \frac{-2y}{1-y^2}$.

**Exercice 3 :**

Soit la matrice $A$ définie par

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Partie A : On s'intéresse à la décomposition $LU$ de $A$.

1. Expliciter la structure des matrices $L$ et $U$ et justifier votre réponse. On ne demande pas de calcul.
   SOL : $L$ est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et ne comporte qu'une sous diagonale non nulle car elle "hérite" de la structure bande de $A$.

   $U$ est triangulaire supérieure et ne comporte qu'une sur diagonale non nulle car elle "hérite" de la structure bande de $A$. On a donc

$$U = \begin{pmatrix} \times & \times & \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix} \text{ et } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \times & 1 & 0 \\ 0 & \times & 1 \end{pmatrix}$$

2. On note $u_{ij}$ les éléments de la matrice $U$, et $l_{ij}$ ceux de $L$.

   (a) Calculer la matrice $U$
   SOL : On trouve

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Calculer la matrice $L$
   SOL : On trouve

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. En déduire le déterminant de la matrice $A$.

   SOL : $\det(A) = \det(LU) = \det(L).\det(U) = \det(U) = \prod_{i=1}^{3} u_{ii} = 1$

4. La matrice $A$ est-elle inversible ? Justifiez votre réponse.

   SOL : $\det(A) = 1$ non nul donc $A$ est inversible

5. On veut résoudre le système $Ax = b$ avec $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Expliquer la démarche qui permet de résoudre ce système à l'aide de la décomposition $LU$.
   SOL : On résout $Ax = b$ en remplaçant par $LUx = b$ donc on résout successivement

$$\begin{aligned} Ly &= b \text{ pour trouver } y \\ \text{puis } Ux &= y \text{ pour trouver } x \end{aligned}$$

   (b) Donner les deux algorithmes impliqués dans cette démarche, en les adaptant au cas présent
   SOL : pour résoudre $Ly = b$ on utilise un algorithme de descente, donné par :

$x_1 \leftarrow b_1$

$$x_i \leftarrow \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{i,j} x_j \right)$$

Du fait des valeurs de $L$ on obtient :
$x_1 \leftarrow b_1$

$$x_i \leftarrow b_i - x_{i-1}$$

Pour résoudre $Ux = y$, on utilise un algorithme de remontée donné par :
$x_n \leftarrow y_n$

$$x_i \leftarrow \left( y_i - \sum_{j=i+1}^{3} u_{i,j} x_j \right)$$

Du fait des valeurs de $U$ on obtient :
$x_3 \leftarrow y_3$

$$x_i \leftarrow y_i - x_{i+1}$$

(c) Déroulez les étapes de ces algorithmes pour trouver la variable intermédiaire $y$ solution de $Ly = b$ puis celle du système $Ax = b$.

$y_1 \leftarrow b_1$

SOL : $$y_i \leftarrow b_i - l_{i,i-1} y_{i-1}$$ donne

$y_1 = 1$
$y_2 \leftarrow b_2 - l_{2,1} y_1 = 2 - 1 * 1 = 1$
$y_3 \leftarrow b_3 - l_{3,2} y_2 = 2 - 1 * 1 = 1$
Finalement $y = (1, 1, 1)$. Vérification :

$$L * y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = b$$

Ensuite
$x_3 \leftarrow y_3$

$$x_i \leftarrow y_i - u_{i,i+1} x_{i+1}$$ donne

$x_3 = 1$
$x_2 = y_2 - u_{2,3} x_3 = 1 - 1 * 1 = 0$
$x_1 = y_1 - u_{1,2} x_2 = 1 - 1 * 0 = 1$

Finalement on a $x = (1,0,1)$. Vérifions

$$Ux = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = y$$

Partie B : Interlude d'analyse

1. Pour toute matrice symétrique $S$ déterminer $\|S\|_2$ en fonction des valeurs propres de $S$.
   SOL : D'après les propriétés de la norme 2 on a

   $$\|S\|_2 = \sqrt{\rho(S^* S)}$$

   De la symétrie de $S$, on déduit

   $$\|S\|_2 = \sqrt{\rho(S^2)}$$

   Or les valeurs propres de $S^2$ sont les carrés des valeurs propres de $A$ donc

   $$\|S\|_2 = \rho(S) = |\lambda_n|$$

   où $\lambda_n$ est la plus grande valeur propre de $S$ en module.

2. Déterminer $\|S^{-1}\|_2$en fonction des valeurs propres de $S$.
   SOL : La matrice $S$ est symétrique donc son inverse l'est aussi. On déduit donc comme précédemment que

   $$\left\|S^{-1}\right\|_2 = \sqrt{\rho(S^{-1*} S^{-1})} = \sqrt{\rho(S^{-2})} = \rho(S^{-1})$$

   Les valeurs propres de $S^{-1}$ sont les inverses des valeurs propres de $S$ donc la plus grande valeur propre de $S^{-1}$ est l'inverse de la plus petite valeur propre de $S$, d'où

   $$\left\|S^{-1}\right\|_2 = 1/\left|\lambda_1\right|$$

3. En déduire le conditionnement de $S$ en norme 2.

   SOL :

   $$cond_2(S) = \|S\|_2 \left\|S^{-1}\right\|_2 = \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|}$$

4. Estimez les valeurs propres extrémales de $A$ en utilisant la méthode des cercles de Gersgorin .

   SOL : un cercle de centre 1 et de rayon 1, un cercle de centre 2 et de rayon 1, un cercle de centre 2 et de rayon 2. La matrice est symétrique donc les cercles ligne et colonne sont confondus. Les trois cercles s'intersectent donc on ne peut pas savoir combien de valeurs propres sont réelles a priori (1 ou 3) mais comme $A$ est symétrique, on sait que les 3 valeurs propres sont réelles. Elles sont comprises entre 0 (strictement puisque $A$ est inversible) et 4.

5. Pouvez-vous en déduire une estimation du conditionnement de $A$, relativement à la norme 2 ?

   SOL: non puisque le minimum est zéro.

Partie C : On s'intéresse à la méthode de Jacobi pour résoudre le système $Ax = b$

1. Déterminer la matrice d'itération de Jacobi, notée $J$.
   SOL :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = D - (E + F)$$
   avec
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, E + F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{aligned} J &= D^{-1}(E+F) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

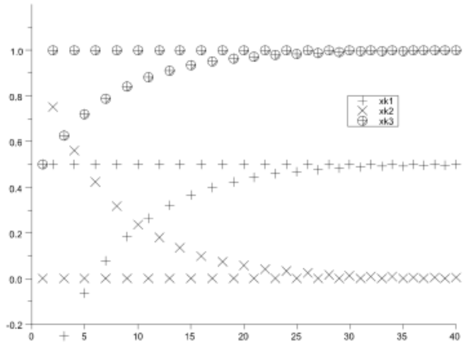
2. La méthode est-elle convergente ? Justifiez votre réponse.

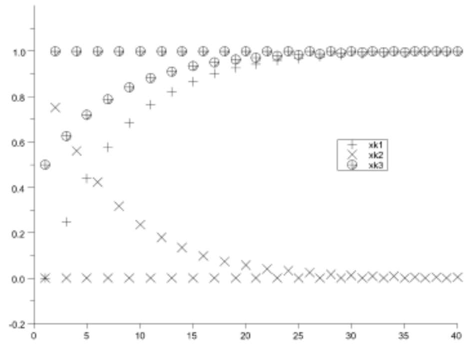
   SOL : On cherche les valeurs propres de $J$.
$$\begin{aligned} \det(J - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\lambda \\ &= \lambda\left[\frac{1}{4} - \lambda^2 + \frac{1}{2}\right] = \lambda\left[\frac{3}{4} - \lambda^2\right] = \lambda\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda\right]\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \lambda\right] \end{aligned}$$
   Les valeurs propres sont donc
$$\begin{aligned} \lambda &= 0 \\ \lambda &= \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$
   Le rayon spectral de $J$ est donc égal à $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ : la méthode converge.

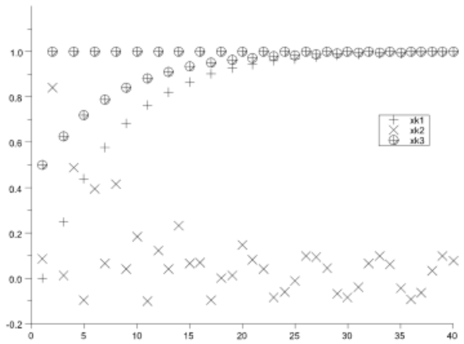
3. Etablir l'expression générale d'un itéré ${}^{(k+1)}$ en fonction de ${}^{(k)}$

   SOL :
$$\begin{aligned} {}^{(k+1)}_{1} &= -\,{}^{(k)}_{2} + 1 \\ {}^{(k+1)}_{2} &= -\frac{1}{2}\,{}^{(k)}_{1} - \frac{1}{2}\,{}^{(k)}_{3} + 1 \\ {}^{(k+1)}_{3} &= -\frac{1}{2}\,{}^{(k)}_{2} + 1 \end{aligned}$$

4. Une simulation numérique a été effectuée sous Scilab. on a représenté les coordonnées du vecteur ${}^{(k)}$ en fonction du numéro d'itération $k$, en partant de ${}^{(0)} = (1, 1, 1)$ Lequel des trois graphiques ci-dessous est-il celui obtenu ? Justifiez votre réponse.




5.

SOL : le second. Car le premier montre que ${}_1^{(k)}$ converge vers 0.5, ce qui n'est pas la valeur de la seconde composante de la solution, le troisième montre que ${}_2^{(k)}$ ne converge pas.