# Analyse Numérique

## Méthodes directes de résolution de systèmes linéaires

Laurence Lamoulie

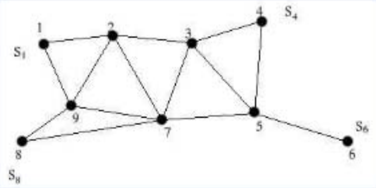
EISTI

Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information

## Soyons clairs...

- Plus de résolution à la main car trop d'inconnues, et résultat trop long à obtenir
- Les méthodes connues ne sont plus utilisables
- Résolution d'un système $\neq$ obtention de la solution exacte en un nombre fini d'étapes.
- Compromis : obtenir une solution approchée en un nombre fini d'étapes, sachant que la solution exacte serait obtenue en un nombre infini d'étapes.
  Ce compromis est le principe même des méthodes itératives.

## Modèle de réseau




Dans chaque arête circule un fluide; à chaque noeud est associé un potentiel. L'intensité (ou le débit) du fluide est proportionnelle à la différence de potentiel entre les deux extrémités de l'arête où il circule; c'est la loi d'Ohm pour les circuits électriques:

$$q_{i,j} = k_{i,j}(u_i - u_j)$$

Une loi physique de conservation (de Kirchoff dans le cas électrique) impose un équilibre : la somme algébrique des intensités en chaque noeud est égale à la valeur de la source (ou du puits) qu'il figure.
Au noeud $P_i$; on a dans le cas du circuit électrique :

$$S_i = \sum_j q_{i,j} = \sum_j k_{i,j}(u_i - u_j)$$

Cette somme peut être étendue aux noeuds adjacents de $P_i$; les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} S_1 = k_{1,2}(u_1 - u_2) + k_{1,9}(u_1 - u_9) \\ 0 = k_{2,1}(u_2 - u_1) + k_{2,9}(u_2 - u_9) + k_{2,7}(u_2 - u_7) + k_{2,3}(u_2 - u_3) \\ \cdots = \cdots \\ 0 = k_{9,1}(u_9 - u_1) + k_{9,2}(u_9 - u_2) + k_{9,7}(u_9 - u_7) + k_{9,8}(u_9 - u_8) \end{cases}$$

De sorte que l'équilibre du système est connu en résolvant le système linéaire

$$Au = S$$

avec une matrice $A$ dont les coefficients non nuls sont représentés ci-dessous par une étoile :

$$A = \begin{pmatrix} * & * & & & & & & & * \\ * & * & * & & & & * & & * \\ & * & * & * & & & * & & \\ & & * & * & * & & & & \\ & & & * & * & * & * & & \\ & & & & * & * & & & \\ & * & * & & * & & * & * & * \\ & & & & & & * & * & * \\ * & * & & & & & * & * & * \end{pmatrix}$$

Le second membre est défini par
$S^T = (S_1; 0; 0; S_4; 0; S_6; 0; S_8; 0)$ :

# Première idée

## Méthode des déterminants?

Les formules de Cramer, dites aussi "méthode des déterminants" fournissent une solution exacte du système linéaire $Ax = b$ dans $\mathrm{R}^n$ avec $\mathrm{x} = (x_1; x_2; \ldots x_n)^T$ donnée par :

$$x_i = \frac{\det A^{(i)}}{\det A}$$

où $A^{(i)}$ désigne la matrice obtenue en substituant dans $A$ la colonne $i$ par le second membre du système.

# Première idée

## Combien ça coûte?

Il y a donc $N+1$ déterminants à calculer.
Le coût du calcul d'un tel déterminant est :

$$c(n) \sim n \times n! \text{ opérations élémentaires}$$

et le coût global de la méthode est donc

$$C(n) \sim n \times (n-1)! \text{ opérations}$$

Le coût de la résolution d'un système $100 \times 100$ peut alors être évalué par la formule de Stirling ($n! \sim n^{n+1/2} e^{\ \ n} \sqrt{2\ }$).
Cela conduit à l'évaluation :

$$C(n) \sim 9{:}4 \times 10^{161}$$

# Se ramener à plus simple

## Systeme diagonal

Si $A$ est une matrice diagonale, c'est à dire si

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ avec } a_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j$$

le système $Ax = b$ est immédiatement résolu du fait que

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} b_i$$

L'algorithme correspondant est donné par :

Pour i de 1 a n
    $x_i \leftarrow b_i / a_{ii}$
FinPour i

# Pas aussi simple

## Systeme triangulaire

La matrice $A$ d'un système triangulaire supérieur est telle que

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ avec } a_{i,j} = 0 \text{ si } i > j$$

Comme $A$ est inversible,

$$a_{i,i} \neq 0 \text{ si } 1 \leq i \leq n$$

Le système s'écrit

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

# Pas aussi simple

## Algorithme

On obtient alors la solution par un algorithme de *substitution retrograde*, dit aussi simplement *algorithme de remontee* :

$x_n \leftarrow b_n / a_{n,n}$

Pour i de n-1 a 1 par pas de -1

$$x_i \leftarrow \left( b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j \right) / a_{i,i}$$

FinPour i

Le coût du calcul d'un $x_k$ se décompose en :

- $(n-k)$ additions,
- $(n-k)$ multiplications,
- 1 division

# Pas aussi simple

Le coût total de remontée est donc de

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k) = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} \sim \frac{n^2}{2} \text{ additions + multiplications}$$

soit $n^2$ opérations élémentaires. **Conseil** : Entraînez-vous à retrouver cet algorithme et à calculer sa complexité...

# Se ramener deux systèmes triangulaires

## Principe

Remplacer $A$ par le produit de deux matrices triangulaires, notées en général $L$ et $U$; respectivement triangulaire inférieure et triangulaire supérieure. En effet on résout alors successivement deux systèmes triangulaires :

$$Ly = b \text{ puis } Ux = y$$

dont la solution $x$ vérifie évidemment $Ax = b$.
En schématisant :

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

# Etape 1

## Elimination de Gauss sans recherche de pivot

Sous l'hypothèse que $a_{11} \neq 0$ on peut l'utiliser pour éliminer l'inconnue $x_1$ des lignes 2 à $n$: Le terme $a_{11}$ est appelé **pivot** et on note pour la suite :

$$ {}_1 = a_{11} $$

La ligne $i$ devient alors:

$$0x_1 + (a_{i2} - \frac{a_{i1}}{{}_1} a_{12})x_2 + : : : + (a_{in} - \frac{a_{i1}}{{}_1} a_{1n})x_n = b_i - \frac{a_{i1}}{{}_1} b_1$$

ce que l'on écrit encore

$$a_{i2}^{(2)} x_2 + : : : + a_{in}^{(2)} x_n = b_i^{(2)}; \forall i > 1$$

# Etape 1

en posant

$$\begin{aligned} a_{i2}^{(2)} &= a_{i2} - \frac{a_{i1}}{1} a_{12} \\ &\vdots \\ a_{in}^{(2)} &= a_{in} - \frac{a_{i1}}{1} a_{1n} \\ b_i^{(2)} &= b_i - \frac{a_{i1}}{1} b_1 \end{aligned}$$

Si on pose aussi, pour $1 \leq j \leq n$

$$a_{1j}^{(2)} = a_{1j}; \forall 1 \leq j \leq n \text{ et } b_1^{(2)} = b_1$$

on a obtenu le système équivalent :

$$A^{(2)} x = b^{(2)}$$

# Etape 1

avec

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

# Etape 1

On voit que

$$A^{(2)} = M^{(1)}A \text{ où } M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le système s'écrit alors

$$A^{(2)} = M^{(1)}A, \text{ et } b^{(2)} = M^{(1)}b$$

Tout se passe comme si on avait prémultiplié à gauche le système initial par $M^{(1)}$:

# Etape k

On suppose que l'on a pu itérer le procédé ci-dessus $k-1$ fois, c'est que l'on n'a jamais rencontré de pivot nul :

$${}_i = a_{ii}^{(i)} \neq 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq k-1$$

On obtient alors le système équivalent :

$$A^{(k)}x = b^{(k)}$$

# Etape k

avec $A^{(k)}$ de la forme

$$
A^{(k)} = \begin{pmatrix}
a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(k)} \\
0 & a_{22}^{(k)} & \ddots & & & & & a_{2n}^{(k)} \\
\vdots & \ddots & a_{33}^{(k)} & \ddots & & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{k-1,k-1}^{(k)} & \cdots & \cdots & a_{k-1,n}^{(k)} \\
\vdots & & & \vdots & 0 & & & \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & A^{(k)} & \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & & &
\end{pmatrix} \tag{1}
$$

# Etape k

où $\widetilde{A}^{(k)}$ est une matrice carrée d'ordre $n-k+1$ :

$$\widetilde{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix} \tag{1}$$

# Etape k

Comme précédemment, on doit effectuer une hypothèse sur la valeur du pivot :

$$ {}_k = a_{kk}^{(k)} \neq 0 $$

On peut alors introduire la matrice

$$ M^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & -\frac{a_{k+1;k}^{(k)}}{\pi_k} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{a_{n;k}^{(k)}}{\pi_k} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1) $$

# Etape k

Remarquons que l'inverse de $M^{(k)}$ est $L^{(k)}$:

$$L(k) = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \ddots & & & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & & \frac{a^{(k)}_{k+1;k}}{\pi_k} & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & \frac{a^{(k)}_{n;k}}{\pi_k} & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix} \tag{1}$$

Soit
$A^{(k+1)} = M^{(k)} A^{(k)}$ et $b^{(k+1)} = M^{(k)} b^{(k)}$

# Etape k

alors

$$A^{(k+1)}x = b^{(k+1)}$$

et

$$A^{(k+1)} = \begin{pmatrix}
a_{11}^{(k+1)} & a_{12}^{(k+1)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(k+1)} \\
0 & a_{22}^{(k+1)} & \ddots & & & & & a_{2n}^{(k+1)} \\
\vdots & \ddots & a_{33}^{(k+1)} & \ddots & & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{k,k}^{(k+1)} & \cdots & \cdots & a_{k,n}^{(k+1)} \\
\vdots & & & \vdots & 0 & & & \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & \hat{A}^{(k+1)} & \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & & &
\end{pmatrix}$$

# Etape k

où $\hat{A}^{(k+1)}$ est une matrice carrée d'ordre $n - k$ :

$$\hat{A}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{k+1n}^{(k+1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nk+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{nn}^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

# Bilan

## Récapitulons

Si on appelle $L$ la matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale, et $L^{(k)}$ la matrice définie en (??)

$$L = L^{(1)} \cdots L^{(n\;1)}$$

et $U$ la matrice triangulaire supérieure

$$U = A^{(n)}$$

on a

$$A = LU$$

On dit qu'on a effectué une **factorisation de Gauss** ou **factorisation LU** de $A$.

# Utilisation : Calcul de déterminant

## Calcul de déterminant

Une utilisation de la factorisation LU est le calcul de déterminant de $A$ : en effet, si $A$ admet une factorisation LU, on a $\det A = \det(LU) = \det L \cdot \det U$ Or $L$ est triangulaire à diagonale unité donc de déterminant 1; ce qui donne finalement

$$\det A = \det U = \prod_{i=1}^{n} \quad {}_{i}$$

La factorisation LU permet donc de calculer le déterminant de $A$ avec une complexité de l'ordre de $\frac{n^3}{3}$ additions et multiplications, au lieu de $n!$ avec la formule du déterminant !

# Utilisation : Résolution de systèmes linéaires

## Résolution de systèmes linéaires

La factorisation LU permet de résoudre successivement deux systèmes triangulaires : $Ly = b$ puis $Ux = y$ dont la solution $x$ vérifie $Ax = b$:
Si on dispose de plusieurs systèmes linéaires de seconds membres différents mais de même matrice $A$ :

$$Ax = b_i \text{ pour } i = 1; :::l$$

il suffit de calculer une seule fois les matrices $L$ et $U$ et de les stocker. On peut alors effectuer autant de descentes et de remontées qu'on a de systèmes pour les résoudre tous, sans pour autant refaire la factorisation LU.
Pour $l$ systèmes à résoudre, la complexité est de l'ordre de $\frac{n^3}{3} + l{:}n^2$additions et multiplications plutôt que $l\frac{n^3}{3}$:

# Stockage

## Principe de l'écrasement

Pour une matrice de taille $n$; on remarque que le nombre de termes à connaître pour disposer des matrices $L$ et $U$ n'est que de $n^2$; puisque la diagonale unité de $L$ n'est pas à stocker. De ce fait on peut utiliser la place mémoire disponible dans $A$ pour y enregistrer les termes de $L$ et $U$.
Cette remarque explique que l'algorithme qui suit "écrase" la matrice $A$ par sa décomposition LU.

# Stockage

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

stocké en

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & 1 & * \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$$