Analyse Numérique

Choix des méthodes, Préconditionnement

Laurence Lamoulie

EISTI

Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information

Principe

Classification des systèmes

- Systèmes de petite taille
- Systèmes de grande taille

Classification des priorités

- Propriétés de la matrice
- Besoins de l'utilisateur
- Moyens de calcul
- Temps de développement

Cas des matrices symétriques

Définition

Le profil d'une matrice symétrique A est $\{(i,j), 1 \leq i \leq N, j_i \leq j \leq i\}$ où j_i est l'indice de la colonne du premier élément non nul de la ligne i.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & & \\ \times & \times & \times & & \\ \times & \times & \times & \times & \\ & & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times \end{pmatrix}$$

Intérêt dans la décomposition LDL^T

Cas des matrices non symétriques

Définition

Soit A une matrice de taille n. On appelle largeur de bande inférieure (resp. supérieure) de la matrice A, l'entier q (resp. p) tel que

$$\begin{aligned}\forall i &= 1, \ldots n, \forall j = 1, .., i - q, \qquad A_{ij} = 0\\ \forall j &= 1, .., n, \forall i = 1, \ldots j - p, \qquad A_{ij} = 0\end{aligned}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} \times & \times & & & \\ \times & \times & \times & & \\ \times & \times & \times & \times & \\ & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times \end{pmatrix}$$

Cas des matrices non symétriques

Remarque

Si la matrice A est symétrique alors la largeur de bande inférieure est égale à la largeur de bande supérieure

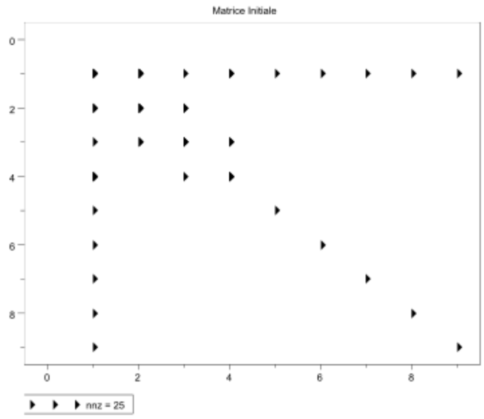
Théorème

On suppose que A est une matrice de taille n, possédant une factorisation LU. Si A est de largeur de bande supérieure q, et de largeur de bande inférieure p, alors U est de largeur de bande supérieure q et L de largeur de bande inférieure p.

Dans le cas où $n >> p$ et $n >> q$ on peut établir un algorithme de décomposition LU revenant à $2npq$ opérations.

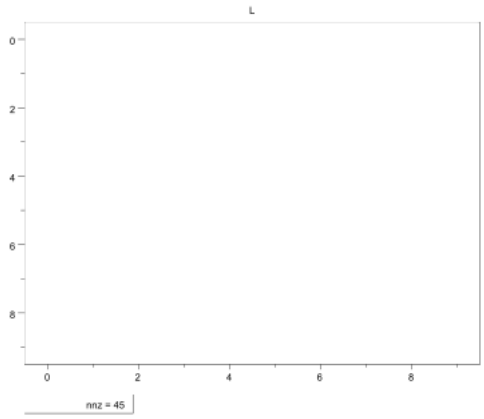
Remplissage des matrices L et U

Considérons la matrice A de profil ci-dessous



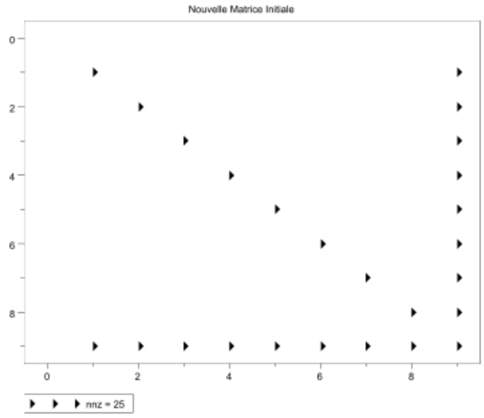
Remplissage des matrices L et U

On obtient la matrice L de profil ci-dessous



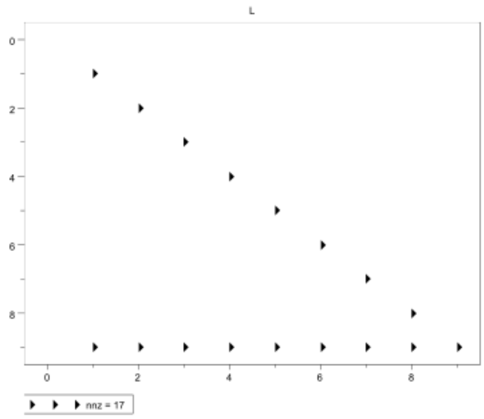
Si on renumérote les inconnues

Cela revient à réordonner les équations, la matrice A prend le profil ci-dessous



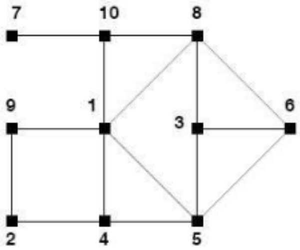
Si on renumérote les inconnues

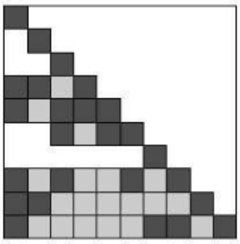
On obtient la matrice L de profil ci-dessous



Principe de représentation : théorie des graphes

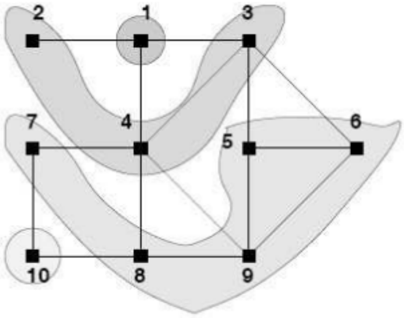
On établit un parallèle entre les éléments non nuls et les relations entre les sommets d'un graphe

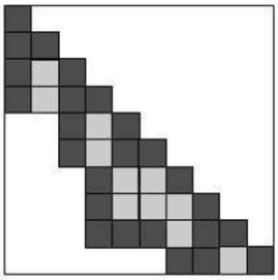




Renumérotation des inconnues

Algorithme de Cuthill-Mc Kee direct





Deux familles

Pas de méthode directe

- erreurs de calcul
- temps de calcul
- pas de solution approchée

Deux pathologies

- Je ne suis pas symétrique : que faire ?
- Je suis mal conditionnée : que faire ?

Idée géniale…ou pas

Pour résoudre le système linéaire $Ax = b$ quand A n'est pas symétrique, on peut résoudre le système équivalent :

$$A^T Ax = A^T b \tag{3.1}$$

Sa matrice est symétrique et définie positive.
Le système est le *systeme d equations normales* associé au système $Ax = b$.

$$cond_2(A^T A) = |\,A^T A|_2 \left|\,(A^T A)^{\;\;1}\right|_2$$

Or $|\,A^T A|_2 = \rho(A^T A)$ car $A^T A$ est symétrique. Mais par ailleurs $|\,A|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$ donc :

$$cond_2(A^T A) = |\,A|_2^2 \,|\,A^{\;\;1}|_2^2 = cond_2^2(A)$$

Idée géniale...ou pas

Problème

On a donc montré que le conditionnement de $A^T A$ est le carré de celui de A.

L'idée n'est pas toujours géniale !

Idée

Simple

Trouver une matrice C telle que CA soit mieux conditionnée que A, et telle que le produit CA soit peu coûteux à calculer

Résolution

On résout alors le système linéaire $CA.x = Cb$ au lieu de $A.x = b$

L'idéal serait de choisir $C = A^{-1}$ mais c'est évidemment trop couteux, on choisit donc d'approcher l'inverse de A. Dans le cas où on veut utiliser le gradient conjugué ou ses dérivés, il est essentiel de conserver les propriétés de symétrie et de définie positivité de A pour le produit CA, afin de conserver la convergence.

Catalogue

Préconditionnement diagonal ou de Jacobi

Il consiste à choisir $C = D^{-1}$ où D est la matrice dont la diagonale est égale à celle de A.

Très efficace et pas cher

Catalogue

Préconditionnement LU incomplet d'ordre 0

Il consiste à faire une décomposition LU en ne calculant que les termes dans le profil de A

Assez efficace et pas trop cher

Catalogue

Quelques centaines d'autres dans la littérature

Idée

Intégrer le préconditionneur dans l'algo.

Voir les algos dans le cours