Chrysostome Baskiotis

Laurence Lamoulie

Jean-Paul Forest

Fascicule des solutions

ANALYSE NUMÉRIQUE

Solutions des exercices

EISTI

Année 2009 – 2010

1

VALEURS ET VECTEURS PROPRES

EXERCICE 1.1 *Soit* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *matrice régulière et soient* λ *valeur propre associée au vecteur propre* $\mathbf{u}$. *Montrer que* $1/\lambda$ *est valeur propre de* $\mathbf{A}^{-1}$ *associée au même vecteur propre* $\mathbf{u}$.

SOL.- $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} = \lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} \Rightarrow (1/\lambda)\,\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$

EXERCICE 1.2 *Soit* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *matrice régulière et soient* λ *valeur propre associée au vecteur propre* $\mathbf{u}$. *Montrer que* λ^k *est valeur propre de* $\mathbf{A}^k$ *associée au même vecteur propre* $\mathbf{u}$, $k > 1$.

SOL.- $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{A}^2\mathbf{x} = \lambda\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{A}^3\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda^3\mathbf{x} \Rightarrow \cdots$

EXERCICE 1.3 *Soit* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *matrice régulière.* $\mathbf{u}$ *est un vecteur propre de* $\mathbf{A}$ *si et seulement si* $\mathbf{u}$ *est un vecteur propre de* $(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I})^{-1}$.

SOL.- $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow (\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I})\,\mathbf{x} = (\lambda - \alpha)\,\mathbf{x} \Rightarrow (\lambda - \alpha)^{-1}\,\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I})^{-1}\,\mathbf{x}$.

EXERCICE 1.4 *Si* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *est nilpotente (c'est-à-dire il existe* $k > 0$ *tel que* $\mathbf{A}^k = 0$*), alors* $\operatorname{trace}(\mathbf{A}) = 0$.

SOL.- Soit $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$. *D'après l'exercice on a* $\lambda^k \in \sigma\left(\mathbf{A}^k\right) = 0$. *Donc, d'après la 6-ième propriété ci-après, on a* $\operatorname{trace}(\mathbf{A}) = 0$.

EXERCICE 1.5 *Soit* $\mathbf{A}$ *une matrice symétrique et* $\mathbf{U}$ *matrice unitaire telle que*

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Supposons que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. *Montrer que*

$$\lambda_1 = \max_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}\,;\,\lambda_n = \min_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}$$

De plus, si $\mathbf{A}$ est définie positive (c'est-à-dire $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} > \mathbf{0}\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$), alors montrer que toutes ses valeurs propres sont positives.

EXERCICE 1.6 *En utilisant les disques de Geršgorin, donner une estimation du nombre maximal de valeurs propres complexes des matrices suivantes :*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ -1/2 & 0 & 6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 3 \end{bmatrix}$$

EXERCICE 1.7 *Soit la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $|a_{ij}| < \varepsilon; \forall i = 1,\ldots,n; i \neq j$.*

Supposons qu'il existe une ligne $r \in \{1,\ldots,n\}$ de la matrice $\mathbf{A}$ telle que $|a_{rr} - a_{ii}| \geq \delta; \forall i = 1,\ldots,n; i \neq r$.

Conidérons la matrice $\mathbf{W}_r \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec

$$w_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} 0,\ si\ i \neq j \\ 1,\ si\ i = j\ et\ i \neq r \\ \alpha,\ si\ i = j = r \end{array} \right\}$$

avec $\alpha > 0$.

Soit la transformation de similitude $\mathbf{B}_r = \mathbf{W}_r \mathbf{A} \mathbf{W}_r^{-1}$

(1) *Évaluer les éléments de $\mathbf{B}_r$ en fonction des éléments de la matrice $\mathbf{A}$.*

(2) *Calculer une borne supérieure pour les rayons des disques $D_r^{(l)}$ et $D_i^{(l)}; i = 1,\ldots,n; i \neq r$ de la matrice $\mathbf{B}_r$.*

(3) *Montrer que sous l'hypothèse $\varepsilon < \frac{\delta}{2(n-1)}$ et en choisissant $\alpha \leq \frac{2\varepsilon}{\delta}$, on réduit le rayon du disque $D_r^{(l)}$ de $\mathbf{B}_r$ et on le rend disjoint des autres disques de la même matrice.*

(4) *Application : Soit la matrice*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0.5 & -0.4 & 0.4 \\ 0.2 & -1 & -0.1 & 0.05 \\ -0.5 & -0.4 & 2.5 & 0.4 \\ 0.1 & 0.05 & 0.1 & -3 \end{bmatrix}$$

avec valeurs propres $4.15, 2.39, -1.027, -3.01$.

Nous avons $\varepsilon = 0.5$.

(a) *Calculer les disques de Geršgorin et leurs rayons pour la matrice $\mathbf{A}$.*

(b) *Pour un indice r pour lequel le disque de Geršgorin $D_r^{(l)}$ n'est pas isolé, calculer δ.*

(c) *Prendre un $\alpha \leq \frac{\delta}{2\varepsilon}$ et construire la matrice $\mathbf{W}_r$.*

(d) *Calculer la matrice $\mathbf{B}_r$.*

(e) *Calculer les disques de Geršgorin et leurs rayons pour la matrice $\mathbf{B}_r$.*

Le disque $D_r^{(l)}$ a maintenant une taille réduite.

S'il y a une autre ligne r' telle que $D_r^{(l)} \cap D_{r'}^{(l)} \neq \varnothing$, répéter cette opération pour la ligne r'.

SOL. (1) $\mathbf{B}_r$ est comme $\mathbf{A}$ sauf que

– *la ligne r est multipliée par α ;*

– *la colonne r est multipliée par $1/\alpha$*

– $b_{rr} = a_{rr}$.

(2) On a pour les rayons des disques de $\mathbf{B}_r$

– $R_r^{(l)} = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{n} \mid b_{rj} \mid = \alpha \cdot \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{n} \mid a_{rj} \mid < \alpha \cdot (n-1)\varepsilon$;

– $R_i^{(l)} = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mid b_{ij} \mid = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i,r}}^{n} \mid a_{ij} \mid + \frac{1}{\alpha} \mid a_{rj} \mid < (n-2)\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\alpha}$.

(3) Puisque $\alpha = \frac{2\varepsilon}{\delta}$, on a

– $R_r^{(l)} < \frac{2(n-1)}{\delta}\varepsilon^2 = \frac{1}{\varepsilon}\varepsilon^2 = \varepsilon$;

– $R_i^{(l)} < (n-2)\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\alpha} = (n-2)\varepsilon + \frac{\delta}{2}$

d'où $R_r^{(l)} + R_i^{(l)} < \varepsilon + (n-2)\varepsilon + \frac{\delta}{2} < \delta$.

Comme donc la somme du rayon du disque $D_r^{(l)}$ et du rayon de n'importe quel autre disque $D_i^{(l)}$ de $\mathbf{B}_r$ est inférieur à δ, on en conclut que le disque $D_r^{(l)}$ est isolé des autres disques car par hypothèse on a $|a_{rr} - a_{ii}| > \delta; \forall i = 1, \ldots, n; i \neq r$.

(4) On a $R_1^{(l)} = 1.3$ et centre 4, $R_2^{(l)} = 0.35$ et centre -1, $R_3^{(l)} = 1.3$ et centre 2.5 et $R_4^{(l)} = 0.25$ et centre -3. Donc les troisième et quatrième disques se recoupent.

On prend $r = 1$. Comme $|a_{rr} - a_{ii}| \geq 1.5; \forall i = 1, \ldots, n; i \neq r$, on prendra $\delta = 1.5$ et, par conséquent, $\varepsilon < 1.5/3$. On prendra donc $\alpha = 1/23 \leq \varepsilon$.

On a $\mathbf{B}_r = \begin{bmatrix} 4 & 0.021 & -0.01 & 0.017 \\ 4.6 & -1 & -0.1 & 0.05 \\ -11.5 & -0.4 & 2.5 & 0.4 \\ 2.3 & 0.05 & 0.1 & -3 \end{bmatrix}$ *et le rayon du premier disque est réduit, mais ce disque est maintenant inclu dans le troisième. On répète donc cette procédure pour $r' = 3$ en utilisant les mêmes valeurs que précédement. On obtient* $\mathbf{B}_{r'} = \begin{bmatrix} 4 & 0.021 & -0.04 & 0.017 \\ 4.6 & -1 & --2.3 & 0.05 \\ -0.5 & -0.017 & 2.5 & 0.4 \\ 2.3 & 0.05 & 2.3 & -3 \end{bmatrix}$ *ce qui permet la séparation des premier et troisième disque. Cette matrice montre aussi que les deux autres disques ne sont pas maintenant séparés, mais c'est sans importance, parce que on a pu, en utilisant la matrice $\mathbf{A}$, localiser les deuxième et quatrième valeurs propres.*

2

DÉCOMPOSITION EN VALEURS SINGULIÈRES

EXERCICE 2.1 *Déterminer la projection orthogonale* $\mathbf{x} = [2,0,1]^\top$ *dans* $\operatorname{vect}\{\mathbf{u}\}$ *ainsi que la projection orthogonale de* $\mathbf{x}$ *dans* $\mathbf{u}^\perp$. *On prendra* $\mathbf{u} = [2,-1,3]^\top$. *Préciser le projecteur orthogonal* $\mathbf{P}_\mathbf{u}$ *dans* $\operatorname{vect}\{\mathbf{u}\}$ *et le projecteur orthogonal* $\mathbf{P}_{\mathbf{u}^\perp}$ *dans* $\mathbf{u}^\perp$.

SOL.- Il faut que $\mathbf{u}$ *soit unitaire.Donc on prend* $\mathbf{u}' = \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$. *La projection orthogonale de* $\mathbf{x}$ *dans* $\operatorname{vect}\{\mathbf{u}\}$ *est*

$$\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}\left(\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}\right)^\top \mathbf{x} = \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^\top}{\mathbf{u}^\top\mathbf{u}}\mathbf{x} = \frac{1}{2}[2,-1,3]^\top$$

La projection orthogonale de $\mathbf{x}$ *dans* $\mathbf{u}^\top$ *est*

$$\left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^\top}{\mathbf{u}^\top\mathbf{u}}\right)\mathbf{x} = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^\top\mathbf{x}}{\mathbf{u}^\top\mathbf{u}} = \frac{1}{2}[2,1,-1]$$

On a $\mathbf{P}_\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^\top}{\mathbf{u}^\top\mathbf{u}}$ *et* $\mathbf{P}_{\mathbf{u}^\perp} = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^\top}{\mathbf{u}^\top\mathbf{u}}$.

EXERCICE 2.2 *Toute matrice* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *carrée, diagonalement dominante strictement (c'est-à-dire telle que* $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |\, a_{ij}\,|$ *;* $i = 1,\ldots,n$*) est régulière.*

SOL.- Il faut trouver que $\operatorname{rang}\mathbf{A} = n$*, c'est-à-dire que* $N(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$. *On suppose qu'il existe un vecteur* $\mathbf{x} = [x_1,\ldots,x_n]^\top \neq \mathbf{0}$*, solution du système* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. *Supposons que* $x_k = \max_i x$. *La k-ième ligne* *du système* $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ *donne*

$$a_{kk}x_k = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq}}^{n} a_{kj}x_j$$

d'où on obtient

$$|a_{kk}|\,|x_k| = \left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq}}^{n} a_{kj}x_j\right| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq}}^{n} |a_{kj}x_j| = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq}}^{n} |a_{kj}|\,|x_j| \leq \left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq}}^{n} |a_{kj}|\right)|x_k|$$

et donc

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq}}^{n} |a_{kj}|$$

qui contredit l'hypothèse de la stricte dominance diagonale. Par conséquent on a $N(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$.

EXERCICE 2.3 *Soit l'application linéaire* $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *définie sur les vecteurs de la base canonique par les relations*

$$A(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2\,;\, A(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_2\,;\, A(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$$

où $\mathbf{e}_i$ *vecteur de la base canonique* $\mathcal{B}$.

(1) *Écrire la matrice* $\mathbf{A}$ *de l'application linéaire* A *dans la base* $\mathcal{B}$.

SOL.- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2) *Déterminer* $N(\mathbf{A})$ *et* $R(\mathbf{A})$ *ainsi que leurs dimensions.*

SOL.- $N(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$ *et* $\dim N(\mathbf{A}) = 0$ *car* $\det \mathbf{A} = -2 \neq 0$, *donc* $\mathbf{A}$ *est régulière, donc l'application* A *est bijective.*

(3) *Montrer que les vecteurs*

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_2\,;\, \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2\,;\, \mathbf{f}_3 = -\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

forment une nouvelle base $\mathcal{B}'$.

SOL.- La matrice de l'application est $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *d'où* $\det \mathbf{B} = -1 \neq 0$, *donc les vecteurs* $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$, *et* $\mathbf{f}_3$ *sont indépendants.*

(4) *Écrire la matrice* $\mathbf{A}$ *dans la nouvelle base* $\mathcal{B}'$.

SOL.- La matrice de changement de base est $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ *d'où* $\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *donc* $\mathbf{A}' = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & 3 \end{bmatrix}$.

EXERCICE 2.4 *Soit la matrice*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \tag{2.0.1}$$

(1) *Calculer le matrices* $\mathbf{L} \in \mathbf{R}^{2\times 2}, \mathbf{U} \in \mathbf{R}^{2\times 3}$ *telles que* $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$.

SOL. $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & à & 0 \end{bmatrix}$

(2) *Déterminer les quatre espaces associés avec* $\mathbf{A}$ *et préciser leur base.*

SOL.- $N(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ / \ \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\} = N(\mathbf{A}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \mathbf{n}_1 =$ $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top, \mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$. *Le 3e vecteur* $\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}^\top$ *n'est pas indépendant de deux autres. Donc* $N(\mathbf{A}) = \text{vect}\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\}$ *et* $\dim N(\mathbf{A}) = 2$.

Par conséquent

$\dim R(\mathbf{A}) = 1$. $R(\mathbf{A}) = \{\mathbf{Ax} \in \mathbb{R}^2 \ / \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ / \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \right\} \Rightarrow$

$y_1 = 1, y_2 = 2 \Rightarrow \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^\top \Rightarrow R(\mathbf{A}) = \text{vect}\{\mathbf{r}_1\}$.

$R(\mathbf{A}^\top) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \mathbf{x} = \mathbf{A}^\top \mathbf{y}, y \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \rho_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^\top$.

Donc $R(\mathbf{A}^\top) = \text{vect}\{\rho_1\}$ *et* $\dim R(\mathbf{A}^\top) = 1$.

$N(\mathbf{A}^\top) = \{y \in \mathbb{R}^2 / \mathbf{A}^\top y = \mathbf{0}\} = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \Big/ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \nu_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}^\top$. *Donc* $N(\mathbf{A}^\top) = \text{vect}\{\nu_1\}$ *et* $\dim N(\mathbf{A}^\top) = 1$.

(3) *En utilisant la réponse à la question précédente, expliquer pourquoi le système* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, *avec* $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ *n'a pas de solution. Trouver le vecteur* $\mathbf{b}'$ *le plus proche de* $\mathbf{b}$ *pour lequel le système a une solution.*

SOL. Nous avons $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \notin R(\mathbf{A})$. *Donc* $\mathbf{b}$ *n'est pas une solution du système.*

Le vecteur $\mathbf{b}'$ *qui est solution du système doit être dans* $R(\mathbf{A})$. *On cherche donc le vecteur de* $R(\mathbf{A})$ *qui est le plus proche de* $\mathbf{b}$. *Donc* $\mathbf{b}'$ *doit être la projection orthogonale de* $\mathbf{b}$ *dans* $R(\mathbf{A})$. *Par conséquent le vecteur* $\mathbf{b} - \mathbf{b}'$ *doit être orthogonal à* $\mathbf{r}_1 \Rightarrow \mathbf{r}_1^\top(\mathbf{b} - \mathbf{b}') = 0 \Rightarrow \mathbf{r}_1^\top \mathbf{b} = \mathbf{r}_1^\top \mathbf{b}'$. *Comme* $\mathbf{b}$ $\in R(\mathbf{A}) \Rightarrow \mathbf{b} = \alpha \mathbf{r}_1$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbf{r}_1^\top \mathbf{b} = \mathbf{r}_1^\top \alpha \mathbf{r}_1 \Rightarrow \alpha = \frac{\mathbf{r}_1^\top \mathbf{b}}{\mathbf{r}_1^\top \mathbf{r}_1} = \dfrac{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}} = -\frac{1}{5} \Rightarrow \mathbf{b}' =$ $-\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

EXERCICE 2.5 *Utiliser la DVS pour calculer l'inverse d'une matrice régulière.*

Si au moins une de valeurs singulières est nulle, que peut-on conclure pour l'inversion de la matrice ?

SOL.- $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}\mathbf{V}^\top \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{\Delta}^{-1}\mathbf{U}^\top$. *Si* $\sigma_i = 0$, *alors son inverse n'existe pas et par conséquent la matrice est singulière.*

EXERCICE 2.6 *Soit la matrice* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. *Calculer sa DVS.*

SOL.- $\mathbf{A}^\top\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 10, \lambda_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Calcul des vecteurs singuliers droits orthonormaux :* $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,1]^\top$ *et* $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,-1]^\top$ *Donc* $\operatorname{rang}\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. *Calcul des vecteurs singuliers gauche :* $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}[1,2]^\top$ *et* $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}[-2,1]^\top$, *d'où* $\mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. *On teste* $\mathbf{U}\mathbf{\Delta}\mathbf{V}^\top = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$.

EXERCICE 2.7 *Considérons la matrice*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1.000000001 \\ 0.4 & 0.4 & 0.8 \\ 0.6 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

et la matrice perturbée

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{\Delta A} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 4/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1 \\ 2/5 & 2/5 & 4/5 \\ 3/5 & 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

Manifestement laz matrice perturbée est de rang 2 *parce que la troisième colonne est la somme de deux premières colonnes.*

(1) En utilisant Scilab vérifier le rang des matrices $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$.

(2) Comparer les résultats avec les nombre devaleurs singulières, en utilisant la fonction de Scilab svd.

*(3) Examiner si la formule (**??**) est vérifiée.*

SOL.- $\operatorname{rang} A = 3, \operatorname{rang}\mathbf{B} = \mathbf{2}$. *Valeurs singulières de* $\mathbf{A}$ *:* $2.5987215, \quad 0.3681513, \quad 3.537 \times 10^{-10}$. *Valeurs singulières de* $\mathbf{B}$ *:* $2.5987215, \quad 0.3681513, \quad 9.378 \times 10^{-17}$. *Nous avons* $\|\mathbf{\Delta A}\|_2 = 1.0 \times 10^{-9}$ *et* $\max_k |\sigma_k - \widehat{\sigma}_k| = 3.8493342 \times 10^{-10}$ *et donc la relation (**??**) est vérifiée.*

EXERCICE 2.8 *Soit une matrice* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *avec* $r = \operatorname{rang}\mathbf{A} < \min\{n,m\}$. *Montrer que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une matrice* $\mathbf{A}_\varepsilon \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *de rang plein, c'est-à-dire* $\operatorname{rang}\mathbf{A}_\varepsilon = \min\{n,m\}$ *telle que* $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_\varepsilon\| = \varepsilon$.

SOL.- Supposons que $n < m$. *Si la matrice n'est pas de rang plein, c'est-à-dire* $r < n$, *alors il y a* r *colonnes parmi les* n *qui sont linéairement indépendantes. Pour la clarté de l'exposé, supposons que ce sont les premières* r *colonnes qui sont linéairement indépendantes. Nous avons donc la DVS* $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}\mathbf{V}^\top$, *avec* $\mathbf{\Delta} = \operatorname{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_r, 0, \cdots, 0)$. *Construisons une matrice* $\mathbf{A}_{r+1}$ *de rang* $r+1$ *qui a les mêmes valeurs singulières non nulles que la matrice* $\mathbf{A}$ *, plus une valeur singulière supplémentaire,* $\widehat{\sigma}_{r+1} = \varepsilon$, *non nulle.*

Pour ce faire il faut poser $\mathbf{A}_{r+1} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Delta}_{r+1}\mathbf{V}^\top$*, avec* $\boldsymbol{\Delta}_{r+1} = \mathrm{diag}\,(\sigma_1, \cdots, \sigma_r, \widehat{\sigma}_{r+1}, 0, \cdots, 0)$*. En utilisant la relation (**??**), on a que* $|\sigma_{r+1} - \widehat{\sigma}_{r+1}| = \widehat{\sigma}_{r+1} = \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_{r+1}\| = \varepsilon$*. On repète cette opération pour les autres colonnes* $r+2, \ldots, n$ *en rajoutant chaque fois une nouvelle valeur singulière non nulle* $\widehat{\sigma}_{r+2} = \varepsilon, \ldots, \widehat{\sigma}_n = \varepsilon$*. Notons* $\mathbf{A}_\varepsilon$ *la matrice obtenue à la fin. À cause toujours de (**??**), on a* $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_\varepsilon\| = \varepsilon$*.*

3

PSEUDOÏNVERSE ET MOINDRES CARRÉS

EXERCICE 3.1 *Soit* $\mathbf{A}$ *matrice* (m,n) *. La pseudoï nverse* $\mathbf{A}^{+}$ *est une matrice* (n,m) *qui satisfait aux propriétés suivantes :*

(1) $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{P}$; $\mathbf{A}\mathbf{A}^{+} = \mathbf{Q}$

(2) $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\right)^{\top}$

(3) $\mathbf{A}\mathbf{A}^{+} = \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\right)^{\top}$

(4) $\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{A}$

(5) $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{+}$

EXERCICE 3.2 *(Conditions de Moore-Penrose) Si* $\mathbf{Z}$ *est une matrice telle que*

(1) $\mathbf{Z}\mathbf{A} = (\mathbf{Z}\mathbf{A})^{\top}$

(2) $\mathbf{A}\mathbf{Z} = (\mathbf{A}\mathbf{Z})^{\top}$

(3) $\mathbf{A}\mathbf{Z}\mathbf{A} = \mathbf{A}$

(4) $\mathbf{Z}\mathbf{A}\mathbf{Z} = \mathbf{Z}$

alors $\mathbf{Z} = \mathbf{A}^{+}$.

EXERCICE 3.3 *Montrer que* $\left(\mathbf{A}^{+}\right)^{+} = \mathbf{A}$ *et* $\left(\mathbf{A}^{+}\right)^{\top} = \left(\mathbf{A}^{\top}\right)^{+}$.

EXERCICE 3.4 *Montrer que le vecteur* $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$ *satisfait à*

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_2 \geq \|\mathbf{A}\mathbf{x}^*-\mathbf{b}\|_2 \ \forall \mathbf{x} \in I\!R^n$$

De plus

$$si \ \|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_2 = \|\mathbf{A}\mathbf{x}^*-\mathbf{b}\|_2 \ et \ \mathbf{x}^* \neq \mathbf{x} \text{ , alors } \|\mathbf{x}\|_2 > \|\mathbf{x}^*\|_2$$

i.e. $\mathbf{x}^*$ *est le point de norme minimale qui minimise la norme* $\|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_2$.

EXERCICE 3.5 *Soit la matrice* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(1) *Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices* $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top$ *et* $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$.

SOL. $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ *valeurs propres de* $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top$: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$; *valeurs propres de* $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0 \Rightarrow \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Vecteurs propres pour $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top$: $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \end{bmatrix} ; i = 1,2 \Rightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Vecteurs propres pour $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$ *on utilisera la DVS de la matrice* $\mathbf{A}$: $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{V}^\top \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\sqrt{2}v_{11} = 1 \Rightarrow v_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ v_{12} = 0$
$\sqrt{2}v_{21} = 1 \Rightarrow v_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ v_{22} = 0\,.$
$\sqrt{2}v_{31} = 0 \Rightarrow \ v_{31} = 0, \ \ v_{32} = 1$

Pour la 3e ligne de $\mathbf{V}^\top$ *on n'a pas de résultat. On pose* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_{31} + v_{32} = 0, v_{33} = 0$. *De plus le vecteur* $\mathbf{v}_3$ *doit être orthogonal aux deux autres et donc on obtient* $\begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) *Calculer les quatre espace fondamentaux associés à la matrice* $\mathbf{A}$.

SOL.- Nous avons $\operatorname{rang}\mathbf{A} = \mathbf{2}$. *Donc* $R(\mathbf{A})$ *est engendré par* $\mathbf{U}$. *Donc* $R(\mathbf{A}) = \operatorname{vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ *et* $\dim R(\mathbf{A}) = 2$.

$N(\mathbf{A})$ *est engendré par les* $3-2=1$ *dernières colonnes de* $\mathbf{V}$. *Donc* $N(\mathbf{A}) = \operatorname{vect}\{\mathbf{v}_3\}$ *et* $\dim N(\mathbf{A}) = 1$.

$R\left(\mathbf{A}^\top\right)$ *est engendré par les* $2-2=0$ *dernières colonnes de* $\mathbf{U}$. *Donc* $R\left(\mathbf{A}^\top\right) = \{0\}$.

$N\left(\mathbf{A}^\top\right)$ *est engendré par les* $3-1=2$ *premières dernières colonnes de* $\mathbf{V}$. *Donc* $N\left(\mathbf{A}^\top\right) = \operatorname{vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ *et* $\dim N\left(\mathbf{A}^\top\right) = 2$.

(3) Calculer la pseudoïnverse de $\mathbf{A}$ *sans faire usage de la DVS.*

SOL.- (i) Construction de la projection $\mathbf{P}_{\mathbf{R}(\mathbf{A}^\top)}$ *que l'on notera* $\mathbf{P}:\mathbb{R}^3\to N(\mathbf{A})$ *telle que* $\mathbf{Px}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{x}\in N(\mathbf{A})$, *c'est-à-dire* $\mathbf{P}\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix}=\mathbf{0}$. *Il faut aussi que* $\mathbf{P}=\mathbf{P}^\top=\mathbf{P}^2$, *d'où* $\begin{bmatrix}p_1&p_2&p_3\\p_2&p_4&p_5\\p_3&p_5&p_6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix}=\mathbf{0}\Rightarrow p_1=p_2=p_4=p,p_3=p_5=0,p_6=p'\Rightarrow$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}p&p&0\\p&p&0\\0&0&p'\end{bmatrix}\ \textit{et}\ \mathbf{P}^2=\begin{bmatrix}2p^2&2p^2&0\\2p^2&2p^2&0\\0&0&p'^2\end{bmatrix}=\mathbf{P}\Rightarrow p=0.5,p'=1\Rightarrow\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0.5&0.5&0\\0.5&0.5&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

(ii) Construction de la projection $\mathbf{P}_{R(\mathbf{A})}$ *que l'on notera* $\mathbf{Q}:\mathbb{R}^2\to R(\mathbf{A})$ *telle que* $\mathbf{Qb}=\mathbf{b}\Leftrightarrow\mathbf{b}\in R(\mathbf{A})$ *et* $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^\top=\mathbf{Q}^2$. *On a* $\mathbf{Qb}=\mathbf{b}\Leftrightarrow\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

(iii) Construction de l'application $\mathbf{A}^{-1}_{N(\mathbf{A})^\perp}:R(\mathbf{A})\to N(\mathbf{A})^\perp$ *que l'on notera* f. f *est définie par* $R(\mathbf{A})\ni\mathbf{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}\longmapsto f(\mathbf{b})\in N(\mathbf{A})^\perp$. *Prenons un vecteur* $\mathbf{b}\in R(\mathbf{A})$, *par exemple* $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\in R(\mathbf{A})$.

Calculons $\mathbf{x}=f(\mathbf{b})$. *Il faut que* $\mathbf{A}f(\mathbf{b})=\mathbf{b}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\Rightarrow f_1+f_2=2,f_3=1$. *Pour que* $f(\mathbf{b})\in N(\mathbf{A})^\perp$ *il faut avoir* $f_1=f_2$. *Donc* $f(\mathbf{b})=\begin{bmatrix}\frac12 f_1\\ \frac12 f_2\\ f_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

(iv) Utilisation de la projection $\mathbf{P}$. *Nous avons* $\mathbf{b}=\mathbf{A}f(\mathbf{b})=\mathbf{Ax}=\mathbf{A}[\mathbf{P}+(\mathbf{I}-\mathbf{P})]\mathbf{x}=\mathbf{APx}+\mathbf{A}(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{x}$. *Comme* $\mathbf{Px}\in N(\mathbf{A})^\perp$, *on a* $\mathbf{Px}\neq\mathbf{0}\Rightarrow(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{x}\in N(\mathbf{A})\Rightarrow(\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{x}=\mathbf{0}$. *Donc* $\mathbf{b}=\mathbf{Ax}=\mathbf{APx}=\mathbf{Ax}_1$ *avec* $\mathbf{x}_1=\mathbf{Px}\in N(\mathbf{A})^\perp$ *projection de* $\mathbf{x}$ *dans* $N(\mathbf{A})^\perp$.

Pour vérifier, on applique cette relation et on a $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0.5&0.5&0\\0.5&0.5&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0.5&0.5&0\\0.5&-0.5&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

(v) La pseudôinverse de $\mathbf{A}$ *est obtenue en utilisant l'application* (**??**) $\mathbf{A}^+=\mathbf{A}^{-1}_{N(\mathbf{A})^\perp}\mathbf{P}_{R(\mathbf{A})}=f(Q):\mathbb{R}^m\to N(\mathbf{A})^\perp=R(\mathbf{A}^\top)\subseteq\mathbb{R}^n$. *On a* $\mathbf{Q}=\mathbf{I}$, *donc* $f(Q)=\begin{bmatrix}\frac12 f_1\\ \frac12 f_2\\ f_3\end{bmatrix}$. *Comme* $\dim N(\mathbf{A})^\perp=\dim R(\mathbf{A}^\top)=r=2$, *on a que* $N(\mathbf{A})^\perp$ *est engendré par deux vecteurs indépendants qui respectent la forme de* $f(Q)$. *On a donc* $\mathbf{A}^+=\left[\begin{bmatrix}\frac12&0\\ \frac12&0\\0&1\end{bmatrix}\right]$.

On peut vérifier que $\mathbf{AA}^+=\mathbf{I}$.

EXERCICE 3.6 (PERTURBATION DE LA MATRICE DE DONNÉES $\mathbf{X}$) *Soit* $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}1&0\\0&x\\0&0\end{bmatrix}$, $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}y_1\\0\\y_2\end{bmatrix}$ *avec*

$x, y_1, y_2 > 0$. *Considérones la matrice perturbée* $\mathbf{X}+\boldsymbol{\Delta}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \\ 0 & \delta x \end{bmatrix}$. *Supposons que* $\widehat{\mathbf{a}}$ *est la solution des moindres carrés non perturbés et* $\widetilde{\mathbf{a}}$ *la solution des moindres carrés perturbés. Montrer que*

$$\frac{\|\widehat{\mathbf{a}}-\widetilde{\mathbf{a}}\|_2}{\|\widehat{\mathbf{a}}\|_2} \leq \frac{y_3}{a^2 y_1}\delta x$$

SOL.- On calcule :

$\mathbf{X}^\top \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{bmatrix}, \left(\mathbf{X}^\top \mathbf{X}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/x^2 \end{bmatrix}, \mathbf{X}^+ = \left(\mathbf{X}^\top \mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/x & 0 \end{bmatrix}, \widehat{\mathbf{a}} = \mathbf{X}^+ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$(\mathbf{X}+\boldsymbol{\Delta}\mathbf{X})^\top (\mathbf{X}+\boldsymbol{\Delta}\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2+\delta x^2 \end{bmatrix}, \Big((\mathbf{X}+\boldsymbol{\Delta}\mathbf{X})^\top (\mathbf{X}+\boldsymbol{\Delta}\mathbf{X})\Big)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x^2+\delta x^2} \end{bmatrix}$,

$\mathbf{X}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{x^2+\delta x^2} & \frac{\delta x}{x^2+\delta x^2} \end{bmatrix}, \widetilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \frac{y_2 \delta x}{x^2+\delta x^2} \end{bmatrix}$.

Nous avons $\|\widehat{\mathbf{a}}\|_2 = y_1, \|\widehat{\mathbf{a}}-\widetilde{\mathbf{a}}\|_2 = \frac{y_2\delta x}{x^2+\delta x^2}$ *d'où* $\frac{\|\widehat{\mathbf{a}}-\widetilde{\mathbf{a}}\|_2}{\|\widehat{\mathbf{a}}\|_2} = \frac{y_2 \delta x}{y_1\left(x^2+\delta x^2\right)} \leq \frac{y_3}{a^2 y_1}\delta x$.