EISTI - DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES

EXAMEN D'ANALYSE NUMÉRIQUE I

15 mai 2009 – **DURÉE 3h00**

La consultation et l'échange des documents, et l'utilisation des calculatrices et des téléphones portables sont interdits.

La consultation de 3 feuilles manuscrites recto-verso, format A4 est autorisée

- **Ne pas détacher les feuilles.**
- **Utiliser l'espace blanc pour vos réponses et le verso pour brouillon.**
- **Pensez à indiquer votre nom sur chaque feuille**

Exercice 1.- On cherche à résoudre un système linéaire de n équations à n inconnues s'écrivant :

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \text{ où } \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ et } \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$$

1. Une première méthode consiste à
   - calculer la matrice $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^2$;
   - factoriser $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{LU}$;
   - résoudre les deux systèmes $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$ pour obtenir $\boldsymbol{x}$.

   Précisez le nombre d'opérations utilisées par cette méthode.

   SOL. multiplication de deux matrices : n^3 + décomposition LU : $\frac{2}{3}n^3$

   C'est donc la multiplication des deux matrices qui prend le plus de temps.

   Temps nécessaire pour la solution (estimation) : 10'

2. Proposez une autre méthode utilisant moins de multiplications.

   SOL. Méthode améliorée
   - factoriser $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$. Le problème à résoudre devient $\boldsymbol{LULUx} = \boldsymbol{b}$
   - résoudre les systèmes $\boldsymbol{Lv} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{Uz} = \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{z}$ et $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$ pour obtenir $\boldsymbol{x}$.

   Cette méthode permet d'économiser le produit de deux matrices et donc de réduire le nombre de multiplications.

   Temps nécessaire pour la solution (estimation) : 20'

3. Dans le cas où la matrice $\boldsymbol{A}$ est symétrique quelles sont les simplifications qui interviennent dans la résolution effectuée avec cette dernière méthode ?.

   SOL. Si $\boldsymbol{A}$ est symétrique, la décomposition LU peut être mise sous la forme LDL^T. La résolution de $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ équivaut à $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, elle devient donc celle de $\boldsymbol{L}\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, soit $\boldsymbol{L}\boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{L}^T\right)^2\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Au lieu de résoudre 4 systèmes triangulaires, on n'en résout plus que trois puisque $\left(\boldsymbol{L}^T\right)^2$ est une matrice triangulaire supérieure. Les résolutions des systèmes diagonaux n'occasionnant chacune que n divisions.

   Temps nécessaire pour la solution (estimation) : 20'

Exercice 2.- Soit la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

1. Calculer sa décomposition en valeurs singulières.

   SOL. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$. Valeurs propres de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top$: $\lambda_1 = 16, \lambda_2 = 25$. Valeurs singulières de $\boldsymbol{A}$: $\sigma_1 = 4, \sigma_2 = 5$.

   Matrice de vecteurs propres de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top$: $\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 12 \\ 0 & 16 & 0 \\ 12 & 0 & 16 \end{bmatrix}$. Valeurs propres de $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}$: $\lambda_1 = 16, \lambda_2 = 25, \lambda_3 = 0$.

   Matrice de vecteurs propres de $\boldsymbol{A}^\top A$: $\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 0 & 3/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \end{bmatrix}$.

   Décomposition en valeurs singulières de $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{V}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \\ 4/5 & 0 & -3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

   Temps nécessaire pour la solution (estimation) : 20'

2. Pour chacun des espaces $R(\boldsymbol{A}), N(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{A}^\top), N(\boldsymbol{A}^\top)$ calculer sa dimension et établir sa base.

   (a) *SOL.* On a $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, donc $m = 2, n = 3$. On a aussi $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = \mathbf{2}$.

   - $\dim R(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rang} \boldsymbol{A} = 2$. L'espace est engendré par les deux colonnes de $\boldsymbol{U}$.

- $\dim N(\boldsymbol{A}) = n - \operatorname{rang} \boldsymbol{A} = 3 - 2 = 1$. L'espace est engendré par la dernière colonne de $\boldsymbol{V}$: $\begin{bmatrix} 4/5 \\ 0 \\ -3/5 \end{bmatrix}$.
- $\dim R(\boldsymbol{A}^\top) = \operatorname{rang} \boldsymbol{A} = 2$. L'espace est engendré par les deux premières colonnes de $\boldsymbol{V}$: $\begin{bmatrix} 0 & 3/5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 4/5 \end{bmatrix}$.
- $\dim N(\boldsymbol{A}^\top) = m - \operatorname{rang} \boldsymbol{A} = 2 - 2 = 0$. L'espace est de dimension 0 et se limite au point $\{\boldsymbol{0}\}$.

Temps nécessaire pour la solution (estimation) : 15′

3. En utilisant la décomposition en valeurs singulières, calculer la pseudoïnverse de $\boldsymbol{A}$.

   SOL. On a

$$\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{U}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 3/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3/25 \\ 1/4 & 0 \\ 0 & 4/25 \end{bmatrix}$$

   Temps nécessaire pour la solution (estimation) : 10′

Exercice 3.- On souhaite concevoir un virage d'une voie de chemin de fer entre les points $(0,0)$ et $(1,1)$.

Partie A

On suppose que le virage est décrit par une courbe de la forme

$$y = f(x)$$

qui satisfait aux conditions :

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f'(1) = 0.3$$

On cherche à représenter la courbe à l'aide d'un polynome dans l'intervalle $[0,1]$.

1. Calculer le degré minimal de ce polynôme.

   SOL. On a quatre conditions, donc le degré minimal du polynôme est égal à 3

   Temps nécessaire pour la solution (estimation) : 5′

2. Calculer ce polynôme.

   SOL. $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. On a $p(0) \equiv a_0 = 0 \Longrightarrow p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$.

   $p'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$. On a $p'(0) \equiv a_1 = 0 \Longrightarrow p(x) = a_3x^3 + a_2x^2$.

   $p(1) \equiv a_3 + a_2 = 1,\ p'(1) \equiv 3a_3 + 2a_2 = 0.3 \Longrightarrow a_2 = 2.7, a_3 = -1.7 \Longrightarrow p(x) = -1.7x^3 + 2.7x^2$.

   Temps nécessaire pour la solution (estimation) : 10′

Partie B

On suppose maintenant que le virage est défini par des points donnés sur le parcours, c'est à dire que la courbe de la forme

$$y = g(x)$$

satisfait aux conditions :

$$g(0) = 0, \quad g(1/4) = 0, \quad g(3/4) = 1, \quad g(1) = 1$$

1. Déterminer le polynome d'interpolation de Lagrange satisfaisant ces conditions. On ne demande pas de développer les calculs.

   SOL. Le polynome d'interpolation de Lagrange est donné par

   $$p(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) g(x_k)$$

   où x_k désigne les points d'interpolation : 0, 1/4, 3/4 et 1, et $L_k(x)$ est obtenu par :

   $$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

   avec ici $n = 3$, puisque le nombre de points vaut 4.

   On n'a pas besoin de calculer $L_0(x)$ ni $L_1(x)$ mais uniquement $L_2(x)$ et $L_3(x)$:

   $$L_2(x) = \frac{(x)(x-1/4)(x-1)}{3/4(1/2)(-1/4)} = -\frac{32}{3}x^3 + \frac{40}{3}x^2 - \frac{8}{3}x$$
   $$L_3(x) = \frac{(x)(x-1/4)(x-3/4)}{3/4(1/4)} = \frac{16}{3}x^3 - \frac{16}{3}x^2 + x$$

   soit

   $$p(x) = -\frac{32}{3}x^3 + \frac{40}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{3}x^3 - \frac{16}{3}x^2 + x = -\frac{16}{3}x^3 + 8x^2 - \frac{5}{3}x$$

2. Les deux courbes obtenues sont représentées sur la figure ci-dessous :

   (a) Laquelle des deux courbes représente l'interpolé de Lagrange ?

   SOL. C'est la courbe 1 puisque l'autre ne passe pas par les points d''interpolation.

   (b) Quel est à votre avis l'intérêt de la méthode envisagée dans la partie A par rapport à l'interpolation de Lagrange, pour la construction d'un virage féroviaire ?

   SOL. Ce n'est pas la réduction de la longueur du trajet mais la possibilité de maîtriser la courbure des extrémités du virage.

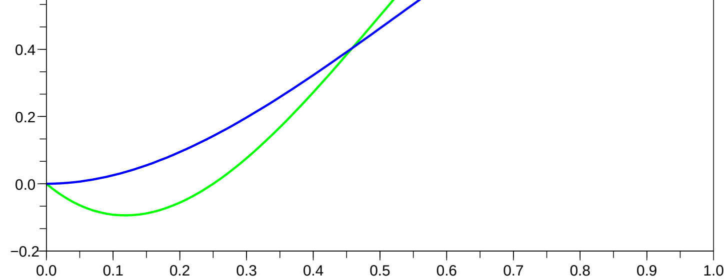

Figure 1: La source et le détecteur tournent autour de l'objet.

Exercice 4.- Calculer la valeur de l'intégrale

$$I(x) = \int_0^2 x dx$$

soit par la méthode de la quadrature de Gauss, en utilisant les polynômes orthogonaux de Legendre avec $n = 2$ soit 3 points, soit par une intégration numérique basée sur une interpolation de Lagrange à 3 points équidistants.

Données : Pour les polynômes orthogonaux de Legendre on a pour $n = 2$ les valeurs

$$w_0 = w_2 = 0.555, \quad w_1 = 0.889; \quad x_2 = -x_0 = 0.775, \quad x_1 = 0$$

SOL.

Solution avec quadrature de Gauss : Pour avoir comme intervalle d'intégration l'intervalle $[-1, 1]$, il faut faire le changement de variable suivant :

$$x = \frac{(2-0)z + (0+2)}{2} = z + 1 \Longrightarrow z = x - 1$$

d'où $dx = dz$. On obtient donc

$$I(x) = \int_0^2 x dx = \int_{-1}^1 (z+1) dz \simeq w_0(z_0+1) + w_1(z_1+1) + w_2(z_2+1) = \cdots = 1.999$$

Solution avec Lagrange 3 points équidistants : $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$, le polynôme d'interpolation de Lagrange donne l'intégrale :

$$I = h \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \alpha_n(k)$$

avec

$$\alpha_n(k) = \int_0^n \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{n} \frac{x - l}{k - l} dx$$

soit ici $h = 1$, donc

$$I = \sum_{k=0}^{n} x_k \alpha_n(k) = \alpha_n(1) + 2\alpha_n(2)$$

avec

$$\begin{aligned}
\alpha_2(0) &= \int_0^2 \prod_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{2} \frac{x-l}{k-l} dx = \int_0^2 \frac{x-1}{-1}\frac{x-2}{-2} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (x^2-3x+2)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} - \frac{12}{2} + 4\right) = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2(1) &= \int_0^2 \prod_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{2} \frac{x-l}{k-l} dx = \int_0^2 \frac{x-0}{1}\frac{x-2}{-1} dx = -\int_0^2 (x^2-2x)dx \\
&= -\left(\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2(2) &= \int_0^2 \prod_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{2} \frac{x-l}{k-l} dx = \int_0^2 \frac{x-0}{2}\frac{x-1}{1} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (x^2-x)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} - 2\right) = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Donc

$$I = \alpha_n(1) + 2\alpha_2(2) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

Il s'agit en fait de la formule des trapèzes !

On trouve une intégrale exacte puisqu'avec les polynomes de Lagrange on retrouve que l'interpolé est égal à la fonction à intégrer.

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2} \quad L_1(x) = \frac{x(x-2)}{-1} \quad L_2(x) = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$p(x) = -x(x-2) + x(x-1) = x(2-x+x-1) = x$$

Temps nécessaire pour la solution (estimation) : 15' voire un peu plus pour Lagrange

Exercice 5.-

1. Soit l'équation différentielle

$$y'(x) = -y(x) + x + 1, \quad y(0) = 1$$

   Pour sa résolution on applique la méthode de Runge d'ordre 4 avec pas $h = 0.1$.

Calculer la valeur de $y(0.1)$.

SOL. On calculera les coefficients $k_i, i = 1, \ldots, 4$.

$$
\begin{aligned}
k_1 &= 0.1 \times f(x_0, y_0) = 0.1 \times f(0,1) = 0.1 \times (-1+0+1) = 0 \\
k_2 &= 0.1 \times f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1) = 0.1 \times f(0.05, 1) = 0.1 \times (-1 + 0.05 + 1) = 0.005 \\
k_3 &= 0.1 \times f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2) = 0.1 \times f(0.05, 1.0025) = 0.1 \times (-1.0025 + 0.05 + 1) = 0.00475 \\
k_4 &= 0.1 \times f(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.1 \times (-1.00475 + 0.1 + 1) = 0.009525
\end{aligned}
$$

d'où

$$y(0.1) = y_1 = 1 + \frac{1}{6} \times (0 + 2 \times 0.005 + 2 \times 0.00475 + 0.009525) = 1.0048375$$

Temps nécessaire pour la solution (estimation) : 20′

2. Soit le système différentiel

$$
\left\{
\begin{array}{c}
y'(x) = -z(x) + x + 1, \\
z'(x) = -2y(x),
\end{array}
\right.
$$

$y(0) = 1, z(0) = 0$

Expliciter la méthode de résolution à l'aide de la méthode de Runge sans effectuer les calculs numériques.

SOL. On introduit le vecteur des fonctions inconnues :

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix}$$

pour transformer le système en :

$$Y'(x) = AY(x) + B(x)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, B(x) = \begin{pmatrix} x+1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les quantités k_1, k_2, k_3, k_4 deviennent :

$$
\begin{aligned}
K_1 &= f(x_n, Y_n) = AY_n + B(x_n) \\
K_2 &= f(x_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{h}{2}K_1) = A\left(Y_n + \frac{h}{2}K_1\right) + B(x_n + \frac{h}{2}) \\
K_3 &= f(x_n + \frac{h}{2}, Y_n + \frac{h}{2}K_2) = A\left(Y_n + \frac{h}{2}K_2\right) + B(x_n + \frac{h}{2}) \\
K_4 &= f(x_n + h, Y_n + hK_3) = A\left(Y_n + \frac{h}{2}K_3\right) + B(x_n + h)
\end{aligned}
$$

puis

$$Y_{n+1} = Y_n + h(\frac{1}{6}K_1 + \frac{1}{3}K_2 + \frac{1}{3}K_3 + \frac{1}{6}K_4)$$

Avec

$$Y(0) = \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Temps nécessaire pour la solution (estimation) : 20′