

ANALYSE NUMÉRIQUE
EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES
AU CHAPITRE 10

PSEUDOINVERSE – DÉCOMPOSITION EN VALEURS SINGULIÈRES

12 mai 2014

EXERCICE 0.1 Toute matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rang 1 peut se mettre sous la forme $\mathbf{A} = \mathbf{u}\mathbf{v}^\top$ avec $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Application $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. Calculer \mathbf{u} et \mathbf{v} .

EXERCICE 0.2 Soit le système $\mathbf{X}\mathbf{a} = \mathbf{y}$, avec $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ et $m > n$. Montrer les trois propositions suivantes :

- (1) Si $\mathbf{X}^\top \mathbf{X}\mathbf{a} = \mathbf{X}^\top \mathbf{y}$, alors le résidu $\mathbf{r}(\mathbf{a}) = \mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{a}$ est tel que $\mathbf{A}^\top \mathbf{r}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.
- (2) \mathbf{a} est solution au sens des moindres carrés ssi elle satisfait à la relation $\mathbf{X}^\top \mathbf{X}\mathbf{a} = \mathbf{X}^\top \mathbf{y}$.
- (3) La solution au sens des moindres carrés est unique ssi $\text{rang}\mathbf{X} = n$.

Partie TP

L'objectif est de reconstruire une image à partir de sa décomposition en valeurs singulières et en utilisant une partie de ses valeurs singulières.

La procédure est la suivante :

- (1) Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ le tableau de l'image.
- (2) On effectue une DVS sur $\mathbf{A} : [\mathbf{U}, \mathbf{S}, \mathbf{V}] = \text{svd}(\mathbf{A})$
- (3) On range les valeurs singulières selon l'ordre décroissant et on construit un graphique avec ces valeurs singulières.
- (4) En examinant le graphique, on décide de garder les $p < n$ plus grandes valeurs propres et les vecteurs correspondants.
- (5) On construit le tableau $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{V}}^\top$ avec $\hat{\mathbf{U}} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p], \mathbf{u}_i$ vecteur propre de $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top$ et $\hat{\mathbf{V}} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p], \mathbf{v}_i$ vecteur propre de $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$.
- (6) Évaluer la qualité de l'approximation en calculant la norme $\|\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}\|$.

Récupérer sur sifoci le fichier `svdImage` et utiliser le script `svdImage` avec les images fournies pour tester la reconstruction d'une image par SVD.

Pour utiliser les programmes de lecture et affichage des images, il faut installer la boîte à outils IPD à l'aide du gestionnaire `atoms`.