Exercice Analyse des erreurs

Soit $y = c \times (a-b)$; $a,b,c \in \mathbb{R}$

Etablir deux algo pour le calcul

Algo1 : $r \leftarrow c*a$; $q \leftarrow c*b$; $s \leftarrow r-q$

Algo2 : $r \leftarrow a-b$; $s \leftarrow c \times r$

Pour chacun des algo, calculer l'erreur absolue Δy du résultat.

Solution : Algo1. a) Posons $x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ on a

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \to \phi^{(1)}\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} r \\ b \\ c \end{bmatrix} \equiv x^{(1)} \to \phi^{(2)}\left(\begin{bmatrix} r \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} r \\ q \end{bmatrix} \equiv x^{(2)} \to \phi^{(3)}\left(\begin{bmatrix} r \\ q \end{bmatrix}\right) = [s] \equiv x^{(3)} = f(y)$$

D'où $f(x) = \phi^{(3)} \circ \phi^{(2)} \circ \phi^{(1)}\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) \Rightarrow \phi = \phi^{(3)} \circ \phi^{(2)} \circ \phi^{(1)}$

$\psi^{(1)} = r - c \times b$ (voir dos pour calcul)

$\psi^{(2)} = r \times q$

$J[\phi(x^{(0)})] = [c, -c, a-b]$ (voir dos)

$J[\psi^{(1)}(x^{(1)})] = [1, -c, -b]$

$J[\psi^{(2)}(x^{(2)})] = [1, -1]$

$H_1 = \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{bmatrix}$ $H_3 = [\eta_3]$

Calcul de Δx. $\Delta x = \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta c \end{bmatrix}$

Calcul de Δy_1. $\Delta y_1 \simeq [c, -c, a-b]\Delta x + [1, -c, -b] H_1 \begin{bmatrix} r \\ b \\ c \end{bmatrix} + [1, -1] H_2 \begin{bmatrix} r \\ q \end{bmatrix} + [\eta_3][s]$

$\Delta y_1 \simeq (c.\Delta a - c.\Delta b + (a-b)\Delta c) + \eta_1.c.a - \eta_2.c.b + \eta_3(c(a-b))$

De la même façon

$\Delta y_2 \simeq (c.\Delta a - c.\Delta b + (a-b)\Delta c) + 2\eta_1(c(a-b))$

Indiquer le meilleur algo pour le calcul de y.

1er terme = on s'en occupe pas

$|\Delta y_1| \leq eps.(|a|+|b|+|a-b|)$ et $|\Delta y_2| \leq eps.|a-b|$

puisque $|a-b| \leq |a|+|b|$ donc Algo 2.

~~Exercice 2 Décomposition de Cholesky (1)~~

~~Soit A une matrice à coefficients dans ℝ, supposée symétrique positive. On rappelle Il matrice triangulaire inférieure L ayant des éléments diagonaux réels > 0 telle que A = LL^T. On qualifie cette décomposition de (1).~~

~~Etablir l'expression d'un élément quelconque de a_{ij} en fonction des éléments l_{ik}, l_{jk}. On tiendra compte de la structure triangulaire de la matrice L.~~

Exercice Valeurs et Vecteurs propres

Considérons une matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ de terme général $A = [a_{ij}]$, non symétrique. Supposons que A est une matrice normale, c'est à dire $AA^T = A^TA$. On forme le vecteur $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{23} - a_{32} \\ a_{31} - a_{13} \\ a_{12} - a_{21} \end{bmatrix}$ et $S = A - A^T$

1) Montrer que la dimension du noyau S est = à 1.

Solution : Le rang de la matrice S est égal à 2

Donc $\dim(S) = 3 - 2 = 1$.

2) Montrer que le noyau $N(S)$ pourrait être engendré par le vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ défini ci-dessus

Solution : On a $S = \begin{bmatrix} 0 & u_3 & -u_2 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 \end{bmatrix}$ d'où on obtient $Su = 0$ et donc u appartient au noyau de S et étant donné que $\dim(S) = 1$, on peut considérer qu'il forme la base de S.

3) Montrer que $S(Au) = 0$, càd que $Au \in N(S)$, sans faire la multiplication de A par u, ensuite, faire la x du résultat avec S.

Solution : On a $A(Su) = 0$ et on obtient

$$S(Au) = (SA)u = ((A - A^T)A)u = (AA - A^TA)u = (AA - AA^T)u = (A(A - A^T))u = (AS)u = A(Su) = 0$$

4) Montrer que le vecteur u est un vecteur propre de la matrice A.

Solution : On a $Au \in N(S)$, donc Au peut s'exprimer comme combinaison linéaire des éléments de la base de S.

Donc $Au = \lambda u$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ valeur propre de A. Du fait que $Au =$ [illegible] et $u \neq 0$, on a que $\lambda = 0$.

5) Application numérique $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Calculer u et vérifier que $Au = 0$

Solution : On a $u = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

Exercice Analyse des erreurs

Soient deux nombres $a, b \in \mathbb{R}$ $a \geq b > 0$ et $1 \leq \frac{a}{b} \leq 2$

On stockera ces nombres réels en simple précision dans un ordinateur qui suit le standard IEEE754.

1) Préciser le codage d'un nombre réel selon IEEE754

Solution : $s = 1$ bit pour le signe, $p = 23$ bits pour la mantisse et $q = 8$ bits pour l'exposants.

2) Donner la représentation de ces nombres sous la forme $x = (-1)^s \times M_i \times 2^{E_i}$ avec $i = a$ ou $i = b$.

Solution : $- a = 1.a_1a_2 \dots a_{23} \times 2^{E_a} = M_a \times 2^{E_a}$

de même pour b.

3) Considérons les mantisses M_a et M_b et les exposants E_a et E_b des nombres a et b. Donner l'intervalle de valorisation $[M_{min}, M_{max}]$ de ces mantisses considérées comme des nombres entiers et aussi l'intervalle de variation $[E_{min}, E_{max}]$ des exposants.

Solution : $I_1 = [0, 2^p - 1]$ $I_2 = [-126, 127]$

4) Montrer que $E_a - E_b \in \{0, 1\}$ (1)

Solution : De la relation $1 \leq \frac{a}{b} \leq 2$ s'ensuit que $M_b \times 2^{E_b} \leq M_a \times 2^{E_a} \leq M_b \times 2^{E_b + 1}$ et donc (1) vrai.

5) Montrer que $a - b = (M_a \cdot 2^\delta - M_b)2^{E_b}$ et calculer δ

Solution : $a - b = M_a \times 2^{E_a} - M_b \times 2^{E_b} = M_a \times 2^{E_a - E_b} - M_b \times 2^{E_b} = (M_a \times 2^{E_a - E_b} - M_b) 2^{E_b} = (M_a \cdot 2^\delta - M_b) 2^{E_b}$ et $\delta = E_a - E_b$.

…ercice 1 Considérons 3 réels $a \gg b \gg c$ et l'opération
$= a(b+c)$ qui peut s'effectuer selon deux

…go 1: $t \leftarrow a \times b$, $R \leftarrow a \times c$, $s \leftarrow t + R$ Algo 2: $t \leftarrow b + c$, $R \leftarrow a \times t$

Etablir lequel de ces algorithmes est le plus crédible.

…lution : Algo1. 1) Déroulement des calculs

$$x = x^{(0)} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \longrightarrow \varphi^{(1)}\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \times b \\ a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ a \\ c \end{bmatrix} = x^{(1)}$$

$$\longrightarrow \varphi^{(2)}\left(\begin{bmatrix} t \\ a \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} t \\ a \times c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ R \end{bmatrix} = x^{(2)} \longrightarrow \varphi^{(3)}\left(\begin{bmatrix} t \\ R \end{bmatrix}\right) =$$

$$[t+R] = [s] \quad \text{Donc } y = \varphi^{(3)} \circ \varphi^{(2)} \circ \varphi^{(1)}\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right)$$

Calcul de $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}$

$$\psi^{(1)} = \varphi^{(3)} \circ \varphi^{(2)}\left(x^{(1)}\right) = \varphi^{(3)} \circ \varphi^{(2)}\left(\begin{bmatrix} t \\ a \\ c \end{bmatrix}\right) = t + ac$$

$$\psi^{(2)} = \varphi^{(3)}\left(\begin{bmatrix} t \\ R \end{bmatrix}\right) = t + R$$

2) Calcul des jacobiens

$$J\varphi(x) = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial a}, \frac{\partial \varphi}{\partial b}, \frac{\partial \varphi}{\partial c}\right] = [b+c, a, a]$$

$$J\psi^{(1)}(x^{(1)}) = \left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial a}, \frac{\partial}{\partial c}\right] = [1, c, a]$$

$$J\psi^{(2)}(x^{(2)}) = \left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial R}\right] = [1, 1]$$

3) Calcul des matrices H_1, H_2, H_3

$$H_1 = \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{bmatrix} \quad H_3 = [\eta_3]$$

Calcul de l'effet total d'arrondi pour l'algo A.

$$E_R(A_1) = \underbrace{[1, c, a]}_{J\psi^{(1)}(x^{(1)})} \underbrace{\begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{H_1} \underbrace{\begin{bmatrix} t \\ a \\ c \end{bmatrix}}_{x^{(1)}} + [1, 1]\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{bmatrix} + [\eta_3][s]$$

En prenant la valeur absolue et en utilisant la majoration $|\eta_i| \leq eps$, on a $E_R(A) \leq 2(ab+ac)\,eps$

on effectue la même chose sur le $2^{ème}$ algo

on obtient le même résultat dans les deux algo sont équivalents niveau précision numérique.

…ercice 2 On définit la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ par

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \; 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \; -1 & 2 \end{bmatrix}$$

On veut résoudre le système $Ax = 0$

1. Montrer en résolvant les n-1 premières équ que $x_k = k.x_1$; $k = 1, \dots, n-1$
2. Résoudre la dernière équ et en déduire que $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$.
3. En déduire que A est régulière (inversible)

…lution : 1. Par récurrence. La relation est vraie pour $k=1$

Pour la k-ième équ on a : $-x_{k-1} + 2x_k - x_{k+1} = 0$

On accepte pour k, on fait pour k+1. $x_{k-1} = (k-1)x_1$ et $x_k = k x_1 \Rightarrow -(k-1)x_1 + 2k x_1 - x_{k+1} = 0 \Rightarrow x_{k+1} = (k+1)x_1$

2. La dernière équation s'écrit $-(n-1)x_1 + 2n x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ et par conséquent $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1} = 0$

3. Le noyau de la matrice A se réduit au point 0 donc la matrice est régulière.

Exercice 3 Soit la matrice

$$Ax = b; \text{ avec } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

1) Calculer les valeurs singulières de A. ($\sqrt{29^2 - 16} = 28.\!$…)

2) Sans faire des calculs, évaluer le rang de la matrice A. Justifier votre réponse.

3) On donne des valeurs singulière à A dans l'ordre décroissant $\sigma_1 = 5,37$, $\sigma_2 = 0,37$, $\sigma_3 = 0$ et on considère la décomposition en valeurs singulières de A $A = U \Sigma V^T$. Expliquer ce qui représente chacune des 3 matrices U, Σ et V.

4) On donne
$$U = \begin{bmatrix} 0,45 & 0,54 & 0,707 \\ 0,77 & -0,64 & 0 \\ 0,45 & 0,54 & -0,707 \end{bmatrix}$$
Trouver les valeurs de la matrice V

5) Calculer, en utilisant la décomposition en valeurs singulières, une approximation $\hat{A}$ de A.

6) Calculer la pseudoïnverse A^+ de A

7) Calculer la solution du système $Ax = b$

8) En utilisant l'approximation $\hat{A}$, calculer $\hat{A}^+$ approchée.

9) Comparer $\hat{A}^+$ et A^+, A votre avis est-il possible d'utiliser $\hat{A}$ pour calculer une approximation de $\hat{A}^+$ de A? Peut on justifier à l'aide de la théorie la réponse?

10) Pourriez vous envisager une méthode ad hoc qui permet d'obtenir une approximation de $\hat{A}^+$ de A^+? Faire les calculs.

Solution : 1) polynome caractéristique $A^TA = AA^T$: $P(\lambda) = \lambda^3 - 29\lambda^2 + 220\lambda$. valeurs propres A^TA : $\lambda_1 = 28.96$, $\lambda_2 = 0,14$, $\lambda_3 = 0$ d'où on obtient les caractéristiques (valeurs) ci-dessous.

2) 2 valeurs singulières non nulles donc le rang est 2, ou, 1^{er} et $3^{ème}$ rangs de $A = \Rightarrow$ rang 2.

3) U est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de AA^T. Σ est une matrice diagonale avec sur la diagonale les valeurs singulières de A

4) Etant donné que $A^TA = AA^T$, on a $V = U$.

5) Pour l'approximation de A on retient les valeurs singulières dont la valeur numérique est importante. Nous, seulement la $1^{ère}$

$$\hat{A} = U\begin{bmatrix} 5,37 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} 1,11 & 1,87 & 1,11 \\ 1,87 & 3,15 & 1,87 \\ 1,11 & 1,87 & 1,11 \end{bmatrix}$$

6) $$A^+ = (U \Sigma V)^{-1} = V \Sigma^{-1} U^T = V\begin{bmatrix} 1/5,37 & 0 & 0 \\ 0 & 1/0,37 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} U^T = \begin{bmatrix} -0,351 & \cdots & \\ 1 & -1 & \\ \cdots & 1 & \end{bmatrix}$$

7) $$x = A^+ b = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

8) $$\hat{A}^+ = V\begin{bmatrix} 1/5,37 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} U^T = \begin{bmatrix} 0,04 & 0,065 & \cdots \\ \cdots & 0,11 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

9) On ne peut pas car la pseudoinverse n'est pas une fonction continue.

10) Comme l'approximation $\hat{A}$ utilise les plus grandes valeurs singulières, il faut les plus grandes valeurs de la pseudoinverse càd les plus petites valeurs singulières de A. On a :

$$\hat{A}^+ = V\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/0,37 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} U^T = \begin{bmatrix} -0,79 & 0,93 & \cdots \\ \cdots & -1,11 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

IEEE :

Simple Prec : 32bit : Signe 1
Exposant 8
Mantisse 23

Double Prec : 64bit : Signe 1
Exposant 11
Mantisse 52

$(-1)^{signe} \times$ Mantisse $\times$ exposant -01111111 -127

$127 = 255/2$

On va de -126 jusqu'à 127 sur 8 bits

Biais $= B = 2^{(q-1)} - 1$ avec q = bits de l'exposant

Propagation des Erreurs

Erreurs sur calculs numériques par ordinateur

$\eta : \frac{\Delta x}{x}$ (Erreur relative)

Δ : Différence entre le nombre saisi et le nombre obtenu

Erreur d'une opération due aux erreurs de représentation de a et b et du résultat.

Erreur de représentation : $\eta^I(a \otimes b)$

Erreur due au calcul : $\eta^C(a \otimes b)$

SOMME : $S = x_1 + x_2 + \dots \Rightarrow \Delta^I S = \Delta^I x_1 + \Delta^I x_2 + \dots$ et $\eta^I(s) = \frac{x_1}{S}\eta^I(x_1) + \frac{x_2}{S}\eta^I \dots$

PRODUIT : $P = x_1 \times x_2 \Rightarrow \Delta^I P = \Delta P \times \left(\frac{\Delta^I x_1}{x_1} + \frac{\Delta^I x_2}{x_2}\right)$ et $\eta^I(P) = \eta^I(x_1) + \eta^I(x_2)$

DIVISION : $Q = \frac{a}{b} \Rightarrow \Delta^I Q = \frac{b\Delta^I a - a\Delta^I b}{b^2}$ et $\eta^I(Q) = \eta^I(a) - \eta^I(b)$

RACINE : $\eta^I(\sqrt{a}^{\,b}) = 0{,}5\,\eta^I(a)$ | $\eta^C((a+b)+c) = \eta^C(a+b) + \eta^C(a+b+c)$

Qualité numérique d'un f^n f = nbre condition : $K(x) = \frac{\left|\frac{f(x)-f(x')}{f(x)}\right|}{\left|\frac{x-x'}{x}\right|} \simeq \left|\frac{f'(x)}{f(x)}x\right|$

Un algo est + credible si il a - d'erreur.

K petit $\Rightarrow$ fonct$^\circ$ bien conditionnée

K est évalué par stabilité de l'algorithme $\Rightarrow$ Si fonct$^\circ$ utilisées l'algo est bien conditionnées.

Erreur du résultat $y = [y_1, \dots, y_m]^T$ d'un algorithme avec comme entrées $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ est :

$$\Delta y = \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \vdots \\ \Delta y_m \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = J[\phi(x)]\Delta x$$

Erreur relative du resultat : $\eta(y) = \begin{bmatrix} \eta(y_1) \\ \vdots \\ \eta(y_m) \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} K(\phi_1, x_1) \dots K(\phi_1, x_n) \\ K(\phi_m, x_1) \dots K(\phi_m, x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(x_1) \\ \vdots \\ \eta(x_n) \end{bmatrix} = K(\phi x)\eta(x)$

$Fl(x) = [Fl(x_1), \dots, Fl(x_n)]$ Algorithme : $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ avec $\phi = \phi^{(c)} \circ \dots \circ \phi^{(1)}$

Déroulement d'un algo : $x = x^{(0)} \to \phi^{(1)}(x^{(0)}) = x^{(1)} \to \dots \to \phi^{(n)}(x^{(n-1)}) = x^{(n)} = y$

$Fl(x^{(k+1)}) = Fl(\phi^{(k+1)}(x^{(k)})) \Rightarrow \Delta x^{(k+1)} = Fl(x^{(k+1)}) - x^{(k+1)}$ | ~~Un algo~~ Algo numériquement stable $\Rightarrow$ Erreurs intermédiaires d'arrondi : $\forall k\ x^{(k)}$ du m̂ ordre de grandeur que erreur inhérente.

Algebre linéaire et perturbations

Vectorielles :

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1m} \\ a_{n1} & a_{nm} \end{pmatrix}$ $A(n,m)$

- norme : $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$
- $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1} |x_i|^2} = \sqrt{x^T x}$, $\|x\|_\infty = \max_{i=1\dots n} |x_i|$
- inégalité de Holder : $\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1} |x_j|} \times \sqrt{\sum_{i=1} (y_j)}$ Cauchy avec $p = q = 2$

Matricielles ~~Normes définitions~~ Frobenius : $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\mathrm{tr}(A^T A)}$ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

m̂ définitions avec $x \to A$ sauf dernière : Si $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \Rightarrow$ norme sous-multiplicative.

$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \Rightarrow$ norme subordonnée : $lub(A) = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

$\|A\|_1 = \max_{j=1..n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (somme colonnes) $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$ (diagonale) $\|A\|_\infty = \max_{i=1..n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (somme lignes)

Un problème est bien conditionné si une petite variation des entrées n'entraîne pas une grande variat° des sorties

Scalaires : $\eta(x) = \frac{\Delta x}{x} = \frac{m(x)-x}{x}$. Vecteurs : $\eta(x) = \frac{m(\|x\|_\infty)-\|x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ Conditionnement : $k(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

A matrice conv. : $\lim_{k\to+\infty} A^k = 0$ et théorème Von Neumann : ~~matrice~~ matrice $I-A$ régulière $\Leftrightarrow (I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}$

Système linéaire : Si A et b ~~ont~~, $Ax=b \Rightarrow (A+\Delta A)(x+\Delta x) = b+\Delta b$

• machine : $m(x) = x(1+\eta) = x+\eta(x)$ $|\eta| < eps.$

Erreur en retard pour 1 colonne de C : $m(C_j) = (A+\Delta A)b_j$ avec $\|\Delta A\| \leq \gamma_n \|A\|$ pour $C = A.B$

Complexité : $C = A.B \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \Rightarrow n^3$ multiplicat° et $n^2(n-1)$ additions $\Rightarrow$ complexité $O(n^3)$

Définitions : + A régulière ~~appli linéaire~~ $\Leftrightarrow A^{-1}$ existe (sinon singulière) | + A orthogonale $\Leftrightarrow A^tA = I \Leftrightarrow A^{-1} = A^t$

+ Appli linéaire $\Rightarrow f(\alpha u+\beta u') = \alpha f(u) + \beta f(u')$ | + A symétrique $\Leftrightarrow A = A^t$

Toute matrice régulière A peut se factoriser de manière unique $A = LU$ avec :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ l_{21} & 1 & \\ l_{n1} & l_{n2} \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

, Rayon spectral : $\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ val propre de } A\}$

• $A(m,n) \Rightarrow n = \dim Im(A) + \dim Ker(A)$

L unique si on met des 1 sur diagonale

~~Chap~~ Méthodes de résolution de systèmes linéaires $Ax=b$ $x=?$

Diagonalisation : $A = PDP^{-1}$ L et U $\Rightarrow$ Factorisat° de Gauss.

Factorisat° LU : $A = LU \Leftrightarrow$ On résoud à la place 2 systèmes $Ly=b$ puis $Ux=y$

Méthodes itératives linéaires $Ax=b$. On veut décomposer A en $A = M-N$

Méthodes non relaxées : A peut s'écrire $A = D-E-F = D+L+U$ avec $A = \begin{bmatrix} \ddots & & F \\ & D & \\ E & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & U \\ & D & \\ L & & \ddots \end{bmatrix}$

	méthode	Décomp $A = M-N$	Matrice $M^{-1}N$	Descript° d'une itération
pour $A = D-E-F$	Jacobi	$A = D-(E+F)$	$J = M^{-1}N = D^{-1}(E+F) = I - D^{-1}A$	$Dx^{k+1} = (E+F)x^k + b$
	Gauss-Seidel	$A = (D-E)-F$	$G = M^{-1}N = (D-E)^{-1}F$	$(D-E)x^{(k+1)} = Fx^{(k)} + b$
	Richardson	$A = I-(I-A)$	$R = M^{-1}N = I-A$	~~x~~ $x^{(k+1)} = (I-A)x^k + b$
pour $A = D+L+U$	Jacobi	$A = D-(L+U)$	$J = M^{-1}N = -D^{-1}(L+U)$	$Dx^{(k+1)} = -(L+U)x^{(k)} + b$
	Gauss-Seidel	$A = (D+L)-U$	$G = M^{-1}N = (D+L)^{-1}U$	$(D+L)x^{(k+1)} = Ux^k + b$

Matrice d'itérat°.