EISTI - DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES

EXAMEN D'ANALYSE NUMÉRIQUE

3 juin 2014 – **DURÉE 3h00**
La consultation et l'échange des documents, et l'utilisation des calculatrices sont interdits.
L'utilisation des 3 feuilles manuscrites recto-verso, format A4 est autorisée

- **Ne pas détacher les feuilles.**
- **Utiliser l'espace blanc pour vos réponses et le verso pour le brouillon.**
- **Pensez à indiquer votre nom sur chaque feuille**

NOM : ....

NOTE

DÉTAIL

Exercice 1.				
Exercice 2.				
	1	**2**	**3**	
Exercice 3.				
	1	**2a**	**2b**	
Exercice 4.				
	1	**2**	**3**	
Exercice 5.				

Le corrigé se trouve sur `http://sifoci.eisti.fr`***, rubrique Analyse Numérique.***

Exercice 1

Soit le nombre réel $4,1$. Donner sa représentation en binaire (signe, exposant et mantisse) selon le standard IEEE-754, en simple précision.

SOL.- Signe = 1, Exposant = 10000011 Mantisse 000 0011 0011 0011 0011 0011

Exercice 2

Soit l'expression

$$a^2b - ab^2$$

On utilise, pour trouver sa valeur, l'algorithme :

$$y = a \times b \times (a - b)$$

Calculer l'erreur Δy de l'algorithme.

SOL.-

$$\begin{aligned} \Delta y \simeq \quad & [2ab - b^2, a^2 - 2ab] \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{bmatrix} \\ & + [a \times b, -a \times b, a - b] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \quad] \\ a \times b \end{bmatrix} \\ & + [a \times b, a - b] \begin{bmatrix} \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}] \begin{bmatrix} a - b \\ a \times b \end{bmatrix} + [\eta_3](a \times b)(a - b) \end{aligned}$$

Exercice 3

Soit la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et le vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ avec $m < n$, $\mathrm{rang}\,(\mathbf{A}) = m$. Considérons le problème

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{x}\|_2 \\ \text{sous les contraintes } \; & \mathbf{Ax} \quad = \mathbf{b} \end{aligned}$$

1. Montrer que la solution du problème peut être obtenue par la résolution des équations

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^\top \mathbf{y} = \mathbf{b} \;\text{ avec } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$$

Indication. Utiliser le fait que si $\mathbf{x}_0$ est solution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1$ avec $\mathbf{x}_1 \in N(\mathbf{A})$ est aussi solution. En effet, $N(\mathbf{A})$ est le noyau de l'application linéaire $\mathbf{A}$ associée à la matrice $\mathbf{A}$ et, par conséquent $\mathbf{Ax} = \mathbf{Ax}_0 + \mathbf{Ax}_1 = \mathbf{Ax}_0 + \mathbf{0} = \mathbf{Ax}_0 = \mathbf{b}$.

SOL.- De l'indication on a que $\|\mathbf{x}\|$ est minimale si $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$. Étant donné que $\mathbb{R}^n = N(\mathbf{A}) \oplus N(\mathbf{A})^\perp = N(\mathbf{A}) \oplus R\left(\mathbf{A}^\top\right)$ (page 156 du poly, formule (9.17)), on en conclut que $\mathbf{x} \in N(\mathbf{A})^\perp = R\left(\mathbf{A}^\top\right)$. Donc pour un $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ on a $\mathbf{x} = \mathbf{A}^\top \mathbf{y} \Longrightarrow \mathbf{b} = \mathbf{Ax} = \mathbf{AA}^\top \mathbf{y}$ c-à-d. le problème est résolu par $\mathbf{AA}^\top \mathbf{y} = \mathbf{b}$.

2. Soit $\Delta\mathbf{A}$ une perturbation de la matrice $\mathbf{A}$. Ainsi la système à résoudre devient :

$$(\mathbf{A} + \mathbf{\Delta A})(\mathbf{x} + \mathbf{\Delta x}) = \mathbf{b}$$

Montrer que

$$\frac{\|\mathbf{\Delta x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\kappa(\mathbf{A})}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \, \|\mathbf{\Delta A}\|} \frac{\|\mathbf{\Delta A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

SOL.- $\left(\mathbf{AA}^\top\right)^\top = \left(\mathbf{A}^\top\right)^\top \mathbf{A}^\top = \mathbf{AA}^\top$, donc symétrique.

$\mathbf{x}^\top \mathbf{AA}^\top \mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^\top \mathbf{x}\right)^\top \left(\mathbf{A}^\top \mathbf{x}\right) \geq 0$. De plus $\left(\mathbf{A}^\top \mathbf{x}\right)^\top \left(\mathbf{A}^\top \mathbf{x}\right) = 0 \iff \mathbf{A}^\top \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$ car $\mathbf{A}$ est de rang plein.

3. Soit $\Delta\mathbf{A}$ une perturbation de la matrice $\mathbf{A}$. Ainsi la système à résoudre est

$$(\mathbf{A} + \mathbf{\Delta A})(\mathbf{x} + \mathbf{\Delta x}) = \mathbf{b}$$

Montrer que

$$\frac{\|\mathbf{\Delta x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\kappa(\mathbf{A})}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{\Delta A}\|} \frac{\|\mathbf{\Delta A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$$

SOL.- $(\mathbf{A} + \mathbf{\Delta A})(\mathbf{x} + \mathbf{\Delta x}) = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{A\Delta x} + \mathbf{\Delta A x} + \mathbf{\Delta A \Delta x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{\Delta x} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{\Delta A}(\mathbf{x} + \mathbf{\Delta x}) \Rightarrow \|\mathbf{\Delta x}\| \leq \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\| \|\mathbf{\Delta A}\| ($
$\left(1 - \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\| \|\mathbf{\Delta A}\|\right) \|\mathbf{\Delta x}\| \leq \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\| \|\mathbf{\Delta A}\| \|\mathbf{x}\| \Rightarrow \frac{\|\mathbf{\Delta x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\kappa(\mathbf{A})}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{\Delta A}\|} \frac{\|\mathbf{\Delta A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$

Exercice 4
On note

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 15 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

1. Représenter les disques de Geršgorin.
   SOL.- Les disques finals sont $\bar{B}(10, 3)$, $\bar{B}(9, 2)$, $\bar{B}(15, 3)$ et $\bar{B}(5, 1)$.
2. En déduire :
   (a) le nombre maximal de valeurs propres complexes non réelles ;
   SOL.- Le disque $\bar{B}(5, 1)$ est disjoint des trois autres, donc il y a une valeur propre réelle dans ce disque.
   Les trois valeurs propres restantes sont dans la réunion des trois disques restants. Comme A est à coefficients réels, son polynôme caractéristique l'est aussi. Donc les valeurs propres, qui sont ses racines, sont soit réelles soit viennent par paires de conjugués.
   Comme il y a au plus trois valeurs propres complexes non réelles, il y en a fait au plus deux.
   (b) un majorant du conditionnement de $\mathbf{A}$ en norme 2.
   SOL.- Toutes les valeurs propres ont un module compris entre 4 et 18. Donc

$$\kappa_2(A) = \frac{\max |\lambda\|_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A}}{\min |\lambda\|_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A}} \leq \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

Exercice 5
On note

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

1. Calculer la décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{A}$.
   SOL.- On a $A^\top A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, puis $\chi_A = X^2 - 9X + 14$, soit $\mathrm{Sp} A^\top A = \{7, 2\}$.
   Comme $E_7 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}^\top$ et $E_2 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}^\top$, on en déduit $V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. En déduire la solution aux moindres carrés du problème $Ax = b$.
   SOL.- On a $AA^\top = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Sp} AA^\top = \{7, 2, 0\}$ d'après les calculs précédents.
   Comme $E_7 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $E_0 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, on en déduit

$$U = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{35} & -1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{14} \\ -5/\sqrt{35} & 0 & 2/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{35} & 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

On a donc $\Sigma = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. En déduire l'équation de la droite qui passe au plus près des points $(1, 1)$, $(2, 0)$ et $(-1, -1)$. Justifier votre réponse.
   SOL.- Si on note $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^\top$ avec x_1 la pente et x_2 la pente à l'origine, alors on cherche une solution aux moindres carrés de $Ax = b$. La droite cherchée est $y = \frac{3}{7}x - \frac{2}{7}$.