EISTI - DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES

EXAMEN D'ANALYSE NUMÉRIQUE
(RATTRAPAGE)

24 juin 2014 – **DURÉE 3h00**

La consultation et l'échange des documents, et l'utilisation des calculatrices sont interdits.
L'utilisation des 3 feuilles manuscrites recto-verso, format A4 est autorisée

- **Ne pas détacher les feuilles.**
- **Utiliser l'espace blanc pour vos réponses et le verso pour le brouillon.**
- **Pensez à indiquer votre nom sur chaque feuille**

NOM : ....

NOTE

DÉTAIL

Exercice 1.

	1	2a	2b	2c
Exercice 2.				

	1	2	3	4	5	6
Exercice 3.						

	1	2	3a	3b	3c-i	3c-ii
Exercice 4.						

Le corrigé se trouve sur `http://sifoci.eisti.fr`, rubrique Analyse Numérique.

NOM : ....

Analyse des erreurs

Exercice 1

Considérons un système de codage selon la standard IEEE-754, avec base $\beta = 2$ et p bits pour la mantisse. Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons par $fl(x)$ la valeur du nombre x codé selon le système de codage, c-à-d. $fl\,(x)$ est le nombre machine qui correspond à x.

On rappelle que la différence relative entre deux nombres flottants consécutifs $fl\,(x_i)$ et $fl\,(x_{i+1})$ est

$$\frac{fl\,(x_{i+1}) - fl\,(x_i)}{fl\,(x_i)} = 2^{1-p}$$

On voudrait que cette distance soit majorée par 10^{-4}. Calculer le nombre de bits qui sont nécessaires pour la mantisse afin d'obtenir cette majoration. cette majoration.

SOL.- On voudrait que $2^{1-p} \leq 10^{-4}$, donc $p \geq 1 - \log_2\left(10^{-4}\right) = 1 - 0 + 13.288$. Il faut donc 14 bits pour coder la mantisse mais comme il y a le bit caché, 13 bits suffisent.

Exercice 2 – Une idée d'Archimède

En 250 av. J.C., Archimède a estimé le nombre π comme suit : dans un cercle de diamètre 1 et donc de circonférence π, a inscrit un carré. Le périmètre du carré est inférieur à la circonférence du cercle, et par conséquent Archimède a obtenu ainsi une limite inférieure pour π. Ensuite il a considéré un octogone, un 16-gone et ainsi de suite, en doublant chaque fois le nombre de côtés du polygone . De cette façon il obtenait des estimations de plus en plus meilleures pour π. Finalement il a montré que $\dfrac{223}{71} < \pi < \dfrac{223}{70}$ ce qui correspond à une estimation avec une erreur comprise entre 10^{-4} et 10^{-2}.

Traduisons l'idée d'Archimède à notre langage d'analyse numérique. Le périmètre p_n d'un polygone de 2^n côtés inscrit dans un cercle de diamètre 1 est donné par la formule

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= 2^n \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{p_n}{2^n}\right)^2}\right)} \qquad (1.1) \\ \text{avec } p_2 &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Si on exécute avec Scilab la relation (1.1) pour $n = 3, 4, \ldots, 30$ on obtient les résultats donnés par le tableau suivant :

n	Valeurs de p_n						
3 - 9	2.8752328	2.8870061	2.889954	2.8906912	2.8908755	2.8909216	2.8909332
10 - 16	2.890936	2.8909368	2.8909369	2.890937	2.890937	2.890937	2.8909371
17 - 23	2.8909371	2.8909364	2.8909417	2.8909628	2.8909206	2.8912584	2.8912584
24 - 30	2.8939592	2.9154759	3.	2.8284271	4.	0.	0.

Manifestement nos ordinateurs modernes ne peuvent pas faire aussi bien qu'Archimède faisait avec la règle et le compas !

Heureusement que l'analyse numérique peut venir en aide aux archimèdes en herbe. Les questions suivantes vous permettront de faire mieux qu'Archimède.

1. D'abord il faut trouver la cause de l'annulation de p_{n+1} pour $n > n_0$. À votre avis quelle est la raison de ce résultat ?
   SOL. *La quantité $\frac{p_n}{2^n}$ devient négligeable pour $n \geq 29$. (En effet $\frac{p_{29}}{2^{29}} = \frac{4}{2^{29}} = 7.45 \times 10^{-9}$). Donc $1 - \sqrt{1 - \left(\frac{p_n}{2^n}\right)^2} \simeq 1 - 1 = 0$.*

2. Après la cause, le remède. Manifestement la formule (1.1) n'est pas adaptée pour un calcul numérique à l'aide d'un ordinateur. Une idée serait de poser

$$q_{n+1} = 2\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{p_n}{2^n}\right)^2}\right)$$

et d'examiner s'il est possible de calculer autrement q_{n+1} et, dans ce cas, exprimer p_{n+1} en fonction de q_{n+1}.

(a) Trouver une autre façon de calculer q_{n+1} et vérifier que cette façon aboutit à des résultats plus corrects.

SOL. *L'idée est d'éviter de diviser par 2^n. Nous allons donc remplacer le calcul de* $2\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{p_n}{2^n}\right)^2}\right)$ *par une formule recursive. On pose*

$$q_{n+1} = 2\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{p_n}{2^n}\right)^2}\right)$$

On a donc

$$p_{n+1} = 2^n \sqrt{q_{n+1}}$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= 2\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2^{n-1} q_n}{2^n}\right)^2}\right) \\ &= 2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{q_n}{4}}\right) \\ &= 2\frac{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{q_n}{4}}\right)\left(1 + \sqrt{1 - \frac{q_n}{4}}\right)}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{q_n}{4}}\right)} \\ &= \frac{q_n}{2 + \sqrt{4 - q_n}} \end{aligned}$$

(b) Exprimer p_{n+1} en fonction de q_{n+1} et vérifier la validité de cette expression.

SOL. *D'après ce qui précède, nous pouvons remplacer le calcul initial de p_n par le suivant*

$$p_{n+1} = 2^n \sqrt{q_{n+1}} \tag{1.2}$$

où

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \frac{q_n}{2 + \sqrt{4 - q_n}} \\ \text{avec } q_3 &= \frac{2}{2 + \sqrt{2}} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Ce remplacement est valide car $q_n > 0$.

(c) Montrer que dans ce cas la quantité p_n ne s'annule pas.

SOL. *Même si la quantité q_n devient négligeable, le terme $p_{n+1} = 2^n\sqrt{q_n}$ ne tend pas vers 0. En effet nous avons d'après (1.2) et (1.3) $p_{n+1} = 2^n\sqrt{q_{n+1}} = 2^n\sqrt{\dfrac{q_n}{2+\sqrt{4-q_n}}} \geq 2^n\sqrt{\dfrac{q_n}{2+\sqrt{4}}} = 2^{n-1}\sqrt{q_n} = p_n$. Donc $(p_n)_n$ est une suite croissante et $p_2 > 0$.*

Algèbre linéaire

Exercice 3

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique définie positive et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur-colonne.
On définit la fonctionnelle

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^\top \mathbf{x}, \text{ avec } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

1. Justifier le fait que le système $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possède une unique solution $\mathbf{x}^*$.
   SOL.- Comme A est définie positive, elle est régulière, ce qui justifie l'existence et l'unicité de $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

2. Considérons une perturbation $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ de $\mathbf{x}$. Montrer que

$$J(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - J(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b})^\top \mathbf{h} + \frac{1}{2}\mathbf{h}^\top \mathbf{A}\mathbf{h}$$

   SOL.-

$$\begin{aligned}
J(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - J(\mathbf{x}) &= \left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{h})^\top \mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{b}^\top(\mathbf{x}+\mathbf{h})\right] - \left[\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^\top \mathbf{x}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(\mathbf{x}+\mathbf{h})^\top \mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}\right] - \left[\mathbf{b}^\top(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{b}^\top \mathbf{x}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{h}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{h} + \mathbf{h}^\top \mathbf{A}\mathbf{h} - \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}\right] - \left[\mathbf{b}^\top \mathbf{x} + \mathbf{b}^\top \mathbf{h} - \mathbf{b}^\top \mathbf{x}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathbf{h}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{h} + \mathbf{h}^\top \mathbf{A}\mathbf{h}\right] - \mathbf{b}^\top \mathbf{h} \\
&= \frac{1}{2}\left[(\mathbf{h}^\top \mathbf{A}\mathbf{x})^\top + \mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{h} + \mathbf{h}^\top \mathbf{A}\mathbf{h}\right] - \mathbf{b}^\top \mathbf{h} \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{h} + \mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{h} + \mathbf{h}^\top \mathbf{A}\mathbf{h}\right] - \mathbf{b}^\top \mathbf{h} \\
&= (\mathbf{A}\mathbf{x})^\top \mathbf{h} + \frac{1}{2}\mathbf{h}^\top \mathbf{A}\mathbf{h} - \mathbf{b}^\top \mathbf{h} = (\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b})^\top \mathbf{h} + \frac{1}{2}\mathbf{h}^\top \mathbf{A}\mathbf{h}
\end{aligned}$$

3. Montrer que $\mathbf{x}^*$, solution du système $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, est un minimum global de J.
   SOL.- D' après ce qui précède, $J(x^* + h) - J(x^*) = (Ax^* - b)^\top h + \frac{1}{2}h^\top Ah = \frac{1}{2}h^\top Ah$. *Le fait que A soit symétrique définie positive permet de conclure que* $J(x^* + h) - J(x^*) \geq 0$ *pour tout vecteur h : donc x^* est un minimum global de J.*

4. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur quelconque.
   On connaît que la direction $\mathbf{d}$ de plus grande descente de J en $\mathbf{x}$ est $\mathbf{d} = \nabla J(\mathbf{x}) = -(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})$.
   Montrer que le coefficient $\alpha^* \in \mathbb{R}$ pour lequel la quantité $J(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{d}) - J(\mathbf{x})$ est minimale, lorsque $\mathbf{d}$ est non nul, est donné par

$$\alpha^* = \frac{\mathbf{d}^\top \mathbf{d}}{\mathbf{d}^\top \mathbf{A}\mathbf{d}}$$

   SOL.- Soit α un nombre réel. En utilisant les résultats de la question 1, on a

$$J(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{d}) - J(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b})^\top(\alpha\mathbf{d}) + \frac{1}{2}(\alpha\mathbf{d})^\top \mathbf{A}(\alpha\mathbf{d}) = \alpha(-\mathbf{d}^\top \mathbf{d}) + \frac{\alpha^2}{2}\mathbf{d}^\top \mathbf{A}\mathbf{d}$$

   Le minimum est réalisé lorsque la dérivée par rapport à α s'annule :

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(J(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{d}) - J(\mathbf{x})\right) \equiv -\mathbf{d}^\top \mathbf{d} + \boldsymbol{\alpha}^* \mathbf{d}^\top \mathbf{A}\mathbf{d} = 0$$

d'où $\alpha^* = \dfrac{\mathbf{d}^\top \mathbf{d}}{\mathbf{d}^\top \mathbf{A}\mathbf{d}}$.

5. À quelle condition sur $\mathbf{x}$, $J(\mathbf{x} + \alpha^*\mathbf{d})$ est strictement inférieure à $J(\mathbf{x})$?
   SOL.- On a
$$\begin{aligned} J(\mathbf{x} + \alpha^*\mathbf{d}) - J(\mathbf{x}) &= \alpha^*(-\mathbf{d}^\top \mathbf{d}) + \frac{(\alpha^*)^2}{2}\mathbf{d}^\top \mathbf{A}\mathbf{d} \\ &= \frac{\mathbf{d}^\top \mathbf{d}}{\mathbf{d}^\top \mathbf{A}\mathbf{d}} \cdot (-\mathbf{d}^\top \mathbf{d}) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{d}^\top \mathbf{d}}{\mathbf{d}^\top \mathbf{A}\mathbf{d}}\right)^2 (\mathbf{d}^\top \mathbf{A}\mathbf{d}) \\ &= -\frac{(\mathbf{d}^\top \mathbf{d})^2}{\mathbf{d}^\top \mathbf{A}\mathbf{d}} + \frac{1}{2}\frac{(\mathbf{d}^\top \mathbf{d})^2}{\mathbf{d}^\top \mathbf{A}\mathbf{d}} = -\frac{1}{2}\frac{(\mathbf{d}^\top \mathbf{d})^2}{\mathbf{d}^\top \mathbf{A}\mathbf{d}} \end{aligned}$$
   La condition $b - Ax = d \neq 0$ revient au cas $x \neq x^*$. Dans ce cas, on a que $d^\top d$ est un réel strictement positif, de même que $d^\top Ad$ grâce au caractère défini positif de A. Donc $J(x + \alpha^* d)$ strictement inférieure à $J(x)$ si $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$.

6. En déduire un algorithme itératif, dans le style algorithme de gradient, qui permet de résoudre $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
   SOL.- On construit l'algorithme suivant à partir d'un point x_0 :
   - $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x}_0$
   - **Répéter**
     - $\mathbf{d} \leftarrow \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$
     - $\alpha \leftarrow \dfrac{\mathbf{d}^\top \mathbf{d}}{\mathbf{d}^\top \mathbf{A}\mathbf{d}}$
     - $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{d}$
   - **jusqu'à** $|\alpha| \cdot \|\mathbf{d}\| < \varepsilon \cdot \|\mathbf{x}\|$

   où ε est la précision relative désirée.

Analyse spectrale

Exercice 4

Soient deux matrices régulières $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ et $\mathbf{A}_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$. On forme la matrice
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{bmatrix}$$
avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ avec $n > \ n_1 + n_2$ et $m = n_1 + n_2$. Les matrices $\mathbf{B}_i, 1 \leq i \leq 4$ ne contiennent que des zéros.

On définit la matrice
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{B}_2^\top & \mathbf{B}_3^\top \\ \mathbf{B}_1^\top & \mathbf{A}_2^{-1} & \mathbf{B}_4^\top \end{bmatrix}$$

1. Donner les dimensions des matrices $\mathbf{B}_i, 1 \leq i \leq 4$.
   SOL.- $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}, \mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}, \mathbf{B}_3 \in \mathbb{R}^{n_3 \times n1}, \mathbf{B}_4 \in \mathbb{R}^{n_3 \times n_2}$, *avec* $n_3 = n - (n_1 + n_2)$.
2. Nous savons que la pseudoïnverse $\mathbf{A}^+$ d'une matrice $\mathbf{A}$ est définie à l'aide de quatre propriétés

   P1 $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$

   P2 $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$

   P3 $\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^+\right)^\top = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$

   P4 $\left(\mathbf{A}^+\mathbf{A}\right)^\top = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$

Montrer que la matrice $\mathbf{Q}$ est la pseudoïnverse de $\mathbf{A}$.

SOL.- $\mathbf{AQA} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{B}_2^\top & \mathbf{B}_3^\top \\ \mathbf{B}_1^\top & \mathbf{A}_2^{-1} & \mathbf{B}_4^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$

$\mathbf{QAQ} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{B}_2^\top & \mathbf{B}_3^\top \\ \mathbf{B}_1^\top & \mathbf{A}_2^{-1} & \mathbf{B}_4^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{B}_2^\top & \mathbf{B}_3^\top \\ \mathbf{B}_1^\top & \mathbf{A}_2^{-1} & \mathbf{B}_4^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{B}_2^\top & \mathbf{B}_3^\top \\ \mathbf{B}_1^\top & \mathbf{A}_2^{-1} & \mathbf{B}_4^\top \end{bmatrix} = \mathbf{Q}$

$(\mathbf{AQ})^\top = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{B}_2^\top & \mathbf{B}_3^\top \\ \mathbf{B}_1^\top & \mathbf{A}_2^{-1} & \mathbf{B}_4^\top \end{bmatrix} \right)^\top = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{AQ}$

$(\mathbf{QA})^\top = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{B}_2^\top & \mathbf{B}_3^\top \\ \mathbf{B}_1^\top & \mathbf{A}_2^{-1} & \mathbf{B}_4^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{bmatrix} \right)^\top = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{QA}$

On vérifie aisément que les dimensions des matrices $\mathbf{A}_i$ et $\mathbf{B}_i$ permettent les multiplications correspondantes.

3. Soit la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   (a) Préciser, sur la matrice ci-dessus, les matrices $\mathbf{A}_i, 1 \leq i \leq 2$ et $\mathbf{B}_i, 1 \leq i \leq 4$ de la question 1.

   SOL.- $\mathbf{A}_1 = [1]\,, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$

   (b) Calculer sa pseudoïnverse en appliquant la formule pour la matrice $\mathbf{Q}$.

   SOL.- $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{B}_2^\top & \mathbf{B}_3^\top \\ \mathbf{B}_1^\top & \mathbf{A}_2^{-1} & \mathbf{B}_4^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (c) Posons

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

   On cherche à calculer le vecteur $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\|\mathbf{Ax}^* - \mathbf{b}\| = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$$

   i. Indiquer quelle méthode nous devons utiliser pour résoudre ce problème. Justifier votre réponse.

ii. Calcule le vecteur $\mathbf{x}^*$.

SOL.- Le problème à résoudre est un problème des moindres carrés et on sait (poly, p. 174) que sa solution réalise le minimum du résidu $\|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\|$. *On a donc* $\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -9 \end{bmatrix}^\top$.