

ANALYSE NUMÉRIQUE  
EXAMEN DU 3 JUIN 2013

**Exercice 1** *Considérons trois réels  $a > b > c > 0$  et l'opération  $y = a(b + c)$  qui peut s'effectuer selon les deux algorithmes ci-après :*

**Algorithme 1**

$$t \leftarrow a * b$$

$$r \leftarrow a * c$$

$$s \leftarrow t + r$$

**Algorithme 2**

$$t \leftarrow b + c$$

$$r \leftarrow a * t$$

*Établir lequel de deux algorithmes est le plus crédible.*

**SOL.-** Algorithme 1.

1. Déroulement des calculs :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} &= \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \longrightarrow \varphi^{(1)} \left( \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a * b \\ a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ a \\ c \end{bmatrix} = \mathbf{x}^{(1)} \longrightarrow \\ \varphi^{(2)} \left( \begin{bmatrix} t \\ a \\ c \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} t \\ a * c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ r \end{bmatrix} = \mathbf{x}^{(2)} \longrightarrow \varphi^{(3)} \left( \begin{bmatrix} t \\ r \end{bmatrix} \right) = [t + r] = [s] \end{aligned}$$

$$\text{Donc } y = \varphi^{(3)} \circ \varphi^{(2)} \circ \varphi^{(1)} \left( \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right).$$

2. Calcul de  $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}$

$$\psi^{(1)} = \varphi^{(3)} \circ \varphi^{(2)} \left( \mathbf{x}^{(1)} \right) = \varphi^{(3)} \circ \varphi^{(2)} \left( \begin{bmatrix} t \\ a \\ c \end{bmatrix} \right) = t + ac$$

$$\psi^{(2)} = \varphi^{(3)} \left( \begin{bmatrix} t \\ r \end{bmatrix} \right) = t + r$$

3. Calcul des Jacobiens

$$\begin{aligned} J\varphi(\mathbf{x}) &= \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial a}, \frac{\partial \varphi}{\partial b}, \frac{\partial \varphi}{\partial c} \right] = [b + c, a, a] \\ J\psi^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)}) &= \left[ \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial t}, \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial a}, \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial c} \right] = [1, c, a] \\ J\psi^{(2)}(\mathbf{x}^{(2)}) &= \left[ \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial t}, \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial r} \right] = [1, 1] \end{aligned}$$

4. Calcul des matrices  $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$  et  $\mathbf{H}_3$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_3 = [\eta_3]$$

5. Calcul de l'effet total d'arrondi pour l'algorithme  $A_1$

$$E_r(A_1) = [1, c, a] \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ a \\ c \end{bmatrix} + [1, 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ r \end{bmatrix} + [\eta_3][s]$$

En prenant la valeur absolue et en utilisant la majoration  $|\eta_i| \leq eps$ , on a

$$E_r(A_1) \leq 2(ab + ac)eps$$

Si on effectue la même démarche pour l'autre algorithme, on aboutit au même résultat et, par conséquent, les deux algorithmes sont équivalents du point de vue précision numérique.

**Exercice 2** On définit la matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

On veut résoudre le système  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

1. Montrer en résolvant les  $n-1$  premières équations que  $x_k = k \cdot x_1$ ;  $k = 1; \dots, n-1$ .
2. Résoudre la dernière équation et en déduire que  $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$ .
3. En déduire que  $\mathbf{A}$  est régulière (invertible).

**SOL.- 1 :** Par récurrence. La relation est vraie pour  $k = 1$ . Pour la  $k$ -ième équation on a

$$-x_{k-1} + 2x_k - x_{k+1} = 0.$$

On accepte pour  $k$  et on va faire la démonstration pour  $k+1$ . Du fait que  $x_{k-1} = (k-1)x_1$  et  $x_k = kx_1$ , on a

$$-(k-1)x_1 + 2kx_1 - x_{k+1} = 0$$

d'où  $x_{k+1} = (k+1)x_1$ .

2 : La dernière équation, compte tenu des relations précédentes, s'écrit

$$-(n-1)x_1 + 2nx_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

et par conséquent  $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$ .

3 : Le noyau de la matrice  $\mathbf{A}$  se réduit au point 0, donc la matrice est régulière.

**Exercice 3** Soit la matrice

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}; \text{ avec } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

1. Calculer les valeurs singulières de  $\mathbf{A}$ . (On donne  $\sqrt{29^2 - 16} = 28.72$ ).
2. Sans faire des calculs, évaluer le rang de la matrice  $\mathbf{A}$ . Justifier votre réponse.
3. On donne les valeurs singulières de  $\mathbf{A}$  dans l'ordre décroissant

$$\sigma_1 = 5.37, \sigma_2 = 0.37, \sigma_3 = 0$$

et on considère la décomposition en valeurs singulières de  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\top$$

Expliquer ce qui représente chacune de trois matrices  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{\Sigma}$  et  $\mathbf{V}$ .

4. On donne

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.54 & 0.707 \\ 0.77 & -0.64 & 0 \\ 0.45 & 0.54 & -0.707 \end{bmatrix}$$

Trouver les valeurs de la matrice  $\mathbf{V}$ .

5. Calculer, en utilisant la décomposition en valeurs singulières, une approximation  $\hat{\mathbf{A}}$  de  $\mathbf{A}$ .
6. Calculer la pseudo-inverse  $\mathbf{A}^+$  de  $\mathbf{A}$ .
7. Calculer la solution du système  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .
8. En utilisant l'approximation  $\hat{\mathbf{A}}$  de  $\mathbf{A}$ , calculer la pseudo-inverse approchée  $\hat{\mathbf{A}}^+$ .
9. Comparer  $\mathbf{A}^+$  et  $\hat{\mathbf{A}}^+$ . À votre avis, est-il possible d'utiliser  $\hat{\mathbf{A}}$  pour calculer une approximation de  $\hat{\mathbf{A}}^+$  de  $\mathbf{A}$ ? Pourriez-vous justifier, à l'aide de la théorie, votre avis?
10. Pourriez envisager une méthode ad hoc qui permet d'obtenir une approximation de  $\hat{\mathbf{A}}^+$  de  $\mathbf{A}^+$ ? Dans ce cas, faites les calculs et comparez le résultat trouvé avec  $\mathbf{A}^+$ ?

**SOL.-** 1. Polynôme caractéristique de  $\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^\top$  :  $P(\lambda) = \lambda^3 - 29\lambda^2 + 220\lambda$  ce qui donne comme valeurs propres de  $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$  :  $\lambda_1 = 28.86, \lambda_2 = 0.14, \lambda_3 = 0$  d'où on obtient les valeurs caractéristiques données ci-dessous.

2. Il y a deux valeurs singulières non nulles, donc le rang est 2, ou, encore, la 1e et 3e ligne de la matrice  $\mathbf{A}$  sont les mêmes, donc son rang est de 2.

3.  $\mathbf{U}$  est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de  $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$  et  $\mathbf{V}$  est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de  $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top$ . La matrice  $\mathbf{\Sigma}$  est une matrice diagonale avec sur la diagonale les valeurs singulières de  $\mathbf{A}$ .

4. Étant donné que  $\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^\top$ , on a  $\mathbf{V} = \mathbf{U}$ .

5. Pour l'approximation de  $\mathbf{A}$  on retient les valeurs singulières dont la valeur numérique est importante. Dans notre cas, seule la 1e valeur singulière est importante. On a donc

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} 5.37 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1.11 & 1.87 & 1.11 \\ 1.87 & 3.15 & 1.87 \\ 1.11 & 1.87 & 1.11 \end{bmatrix}$$

- 6.

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\top)^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^\top = \mathbf{V} \begin{bmatrix} 1/5.37 & 0 & 0 \\ 0 & 1/0.37 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{U}^\top = \begin{bmatrix} -0.75 & 1 & -0.75 \\ 1 & -1 & 1 \\ -0.75 & 1 & -0.75 \end{bmatrix}$$

$$7. \mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

8.

$$\widehat{\mathbf{A}}^+ = \mathbf{V} \begin{bmatrix} 1/5.37 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{U}^\top = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.065 & 0.04 \\ 0.065 & 0.11 & 0.065 \\ 0.04 & 0.065 & 0.04 \end{bmatrix}$$

9. On ne peut pas utiliser  $\widehat{\mathbf{A}}$  pour avoir une approximation  $\widehat{\mathbf{A}}^+$  de  $\mathbf{A}^+$ , car la pseudo-inverse n'est pas une application continue.

10. Comme l'approximation  $\widehat{\mathbf{A}}$  utilise les plus grandes valeurs singulières pour approcher la vraie matrice  $\mathbf{A}$ , si on veut approcher la pseudo-inverse il faut utiliser les plus grandes valeurs singulières de la pseudo-inverse, c'est à dire les plus petites valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{A}$ . On a ainsi

$$\widehat{\mathbf{A}}^+ = \mathbf{V} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/0.37 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{U}^\top = \begin{bmatrix} -0.79 & 0.93 & -0.79 \\ 0.93 & -1.11 & 0.93 \\ -0.79 & 0.93 & -0.79 \end{bmatrix}$$