EISTI - DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES

EXAMEN D'ANALYSE NUMÉRIQUE

5 juin 2012 – **DURÉE 3h00**

La consultation et l'échange des documents, et l'utilisation des calculatrices sont interdits.
L'utilisation des 3 feuilles manuscrites recto-verso, format A4 est autorisée

- **Ne pas détacher les feuilles.**
- **Utiliser l'espace blanc pour vos réponses et le verso pour le brouillon.**
- **Pensez à indiquer votre nom sur chaque feuille**

NOM : ....

NOTE

DÉTAIL

	1	2	3	4	5a	5b	6				
Exercice 1.											

	1	2a	2b	2c	3a	3b	3c	4	5	6	
Exercice 2A.											

	1	2a	2b	3	4	5	6	7	8	9	
Exercice 2B.											

Exercice 3.	
Exercice 4.	

Le corrigé se trouve sur `http://sifoci.eisti.fr`, rubrique Analyse Numérique.

NOM : ....

Exercice 1 **Analyse des erreurs**

Soit la fonction

$$y = c \times (a - b)\,;\ a, b, c \in \mathbb{R}$$

1. Établir deux algorithmes pour le calcul de cette fonction.

   SOL.- 1er algorithme :

```
r <-- c*a
q <-- c*q
s <-- r-q
```

   2e algorithme

```
r <-- a-b
s <-- c*r
```

2. Pour chacun des deux algorithmes, calculer l'erreur absolue Δy du résultat.

   SOL. 1er algorithme

   (a) Posons $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. On a $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \rightarrow \phi^{(1)}\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} r \\ b \\ c \end{bmatrix} \equiv \mathbf{x}^{(1)} \rightarrow \phi^{(2)}\left(\begin{bmatrix} r \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} r \\ q \end{bmatrix} \equiv \mathbf{x}^{(2)} \rightarrow \phi^{(3)}\left(\begin{bmatrix} r \\ q \end{bmatrix}\right) = [s] \equiv \mathbf{x}^{(3)} = f\,(y)$

   d'où on a $f\,(x) = \phi^{(3)} \circ \phi^{(2)} \circ \phi^{(1)}\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) \Rightarrow \phi = \phi^{(3)} \circ \phi^{(2)} \circ \phi^{(1)}$.

   (b) Calcul des quantités $\psi^{(k)}$ pour $k = 1, 2$. On a

   $\psi^{(1)} = \phi^{(3)} \circ \phi^{(2)}\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) = \phi^{(3)} \circ \phi^{(2)}\left(\begin{bmatrix} r \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = r - c \times b$

   $\psi^{(2)} = \phi^{(3)}\left(\mathbf{x}^{(2)}\right) = \phi^{(3)}\left(\begin{bmatrix} r \\ q \end{bmatrix}\right) = r \times q$

   (c) Calcul du jacobien pour $\phi, \psi^{(1)}$ et $\psi^{(2)}$.

   $J\left[\phi\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial a}, & \frac{\partial\phi}{\partial b}, & \frac{\partial\phi}{\partial c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c, & -c, & a - b \end{bmatrix}$,

   $J\left[\psi^{(1)}\left(\mathbf{x}^{(1)}\right)\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r}, & \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial b}, & \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & -c, & -b \end{bmatrix}$

   $J\left[\psi^{(2)}\left(\mathbf{x}^{(2)}\right)\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial r}, & \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & -1 \end{bmatrix}$

   (d) Calcul des matrices H_k, $k = 1, 2, 3$.

   $H_1 = \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \\ 0 & \eta_2 & + \end{bmatrix}, H_3 = [\eta_3]$

   (e) Calcul de $\Delta\mathbf{x}$. On a $\Delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta c \end{bmatrix}$.

   (f) Calcul de Δy_1. On a

   $\Delta y_1 \simeq \begin{bmatrix} c, & -c, & a - b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1, & -c, & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ q \end{bmatrix} + [\eta_3]\,[s]$

   $\Delta y_1 \simeq (c \cdot \Delta a - c \cdot \Delta b + (a - b) \cdot \Delta c) + \eta_1 \cdot c \cdot a - \eta_2 \cdot c \cdot b + \eta_3 \cdot (c \cdot (a - b))$

En procédant de la même façon, on trouve
$\Delta y_2 \simeq (c \cdot \Delta a - c \cdot \Delta b + (a-b) \cdot \Delta c) + 2\eta_1 \cdot (c \cdot (a-b))$

3. Indiquer, en le justifiant, le meilleur algorithme pour le calcul de y.

   Le premier terme étant le même pour les deux expressions, on ne tiendra pas compte pour les calculs. On a ainsi $|\Delta y_1| \leq eps \cdot (|a| + |b| + |a-b|)$ et $|\Delta y_2| \leq 2 \cdot eps \cdot |a-b|$. Puisque $|a-b| \leq |a| + |b|$, le 2e algorithme a une plus petite erreur de calcul.
   Cette affirmation est à prendre avec des précautions à cause des majorations que nous avons effectuées lors du calcul de $|\Delta y_1|$ et $|\Delta y_2|$.

Exercice 2 Décomposition de Cholesky

Soit $\mathbf{A}$ une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$, supposée symétrique définie positive.

On rappelle qu'il existe une unique matrice triangulaire inférieure $\mathbf{L}$ ayant des éléments diagonaux réels strictement positifs telle que $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$. On qualifie cette décomposition de décomposition de Cholesky.

1. Établir l'expression d'un élément quelconque a_{ij} en fonction des éléments l_{ik}, l_{jk}. On tiendra compte de la structure triangulaire de la matrice $\mathbf{L}$.
   (a) l'expression de a_{11}, a_{12}, ...a_{1n} et celle des éléments de $\mathbf{L}$ suivants : l_{11}, l_{21}, ..., l_{n1}.
   (b) l'expression de a_{21}, a_{22}, ...a_{2n} et celle des éléments de $\mathbf{L}$ suivants : l_{22}, ..., l_{n2}.
2. En déduire l'algorithme qui permet de calculer $\mathbf{L}$.
3. Calculer la décomposition de Cholesky de la matrice
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 13 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$
4. Cet algorithme est-il appliquable à des matrices non symétriques ?
5. L'algorithme est-il applicable à des matrices non définies positives ?
   Indication : on reviendra à la définition de la notion de matrice $\mathbf{A}$ définie positive exprimée à partir de la quantité $\mathbf{x}^\top\mathbf{A}\mathbf{x}$, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
6. Application à la résolution de système linéaire
   (a) Expliquer comment utiliser la décomposition de Cholesky pour résoudre le système $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
   (b) Donner l'algorithme de résolution du système triangulaire inférieur.
7. Expliquer comment utiliser la décomposition de Cholesky pour déterminer l'inverse d'une matrice $\mathbf{A}$.
8. Une matrice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ est qualifiée de tridiagonale si $a_{ij} = 0$ dès que $|i - j| \geq 2$.
   (a) Donner un exemple de matrice tridiagonale de dimension n.
   (b) En admettant que si $\mathbf{A}$ est tridiagonale définie positive alors $\mathbf{L}$ l'est aussi, adapter l'algorithme de la décomposition de Cholesky aux matrices tridiagonales.

Exercice 3 Valeurs et vecteurs propres

Considérons une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ de terme général $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, non symétrique. Supposons que $\mathbf{A}$ est une matrice normale, c'est-à-dire que $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}^\top\mathbf{A}$. On forme le vecteur
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{23} - a_{32} \\ a_{31} - a_{13} \\ a_{12} - a_{21} \end{bmatrix}$$
et la matrice
$$\mathbf{S} = \mathbf{A} - \mathbf{A}^\top$$

1. Montrer que la dimension du noyau de $\mathbf{S}$ est égale à 1.
   SOL.- Le rang de la matrice $\mathbf{S}$ est égal à 2. Donc $\dim(\mathbf{S}) = 3 - 2 = 1$.
2. Montrer que le noyau $N(\mathbf{S})$ de $\mathbf{S}$ pourrait être engendré par le vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ défini ci-dessus.
   SOL.- On a
   $$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & u_3 & -u_2 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 \end{bmatrix}$$
   d'où on obtient $\mathbf{Su} = \mathbf{0}$ et donc $\mathbf{u}$ appartient au noyau de $\mathbf{S}$ et étant donné que $\dim(\mathbf{S}) = 1$, on peut considérer qu'il forme la base de $\mathbf{S}$.
3. Montrer que $\mathbf{S}(\mathbf{Au}) = \mathbf{0}$, c'est-à-dire que $\mathbf{Au} \in \mathbf{N}(\mathbf{S})$, sans faire la multiplication de $\mathbf{A}$ par $\mathbf{u}$ ni, ensuite, faire la multiplication du résultat avec $\mathbf{S}$.
   SOL.- On a $\mathbf{A}(\mathbf{Su}) = \mathbf{0}$ et on obtient
   $$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{Au}) &= (\mathbf{SA})\,\mathbf{u} = \left(\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top\right)\mathbf{A}\right)\mathbf{u} = \left(\mathbf{AA} - \mathbf{A}^\top\mathbf{A}\right)\mathbf{u} \\ &= \left(\mathbf{AA} - \mathbf{AA}^\top\right)\mathbf{u} = \left(\mathbf{A}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top\right)\right)\mathbf{u} = (\mathbf{AS})\,\mathbf{u} = \mathbf{A}(\mathbf{Su}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$
4. Montrer que le vecteur $\mathbf{u}$ est un vecteur propre de la matrice $\mathbf{A}$.
   SOL.- On a $\mathbf{Au} \in \mathbf{N}(\mathbf{S})$, donc $\mathbf{Au}$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des éléments de la base de $\mathbf{S}$. Donc $\mathbf{Au} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{u}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ valeur propre de $\mathbf{A}$. Du fait que $\mathbf{Au} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, on a que $\lambda = 0$.
5. Application numérique : $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Calculer $\mathbf{u}$ et vérifier que $\mathbf{Au} = \mathbf{0}$.
   SOL.- On a $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$.