EISTI - DÉPARTEMENT INFORMATIQUE

EXAMEN D'ANALYSE NUMÉRIQUE

14 juin 2011 – **DURÉE 3h00**

La consultation des documents et l'échange des documents et des calculatrices est interdit.
L'utilisation des 3 feuilles manuscrites recto-verso, format A4 est autorisée

- **Ne pas détacher les feuilles.**
- **Utiliser l'espace blanc pour vos réponses et le verso pour brouillon.**
- **Pensez à indiquer votre nom sur chaque feuille**

NOM : ....

NOTE

DÉTAIL

Exercice 1.									
	1	**2**	**3**	**4**					
Exercice 2.									
	1	**2a**	**2b**	**3**	**4**	**5a**	**5b**	**5c**	
Ex. 3, Part. A.									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**				
Ex. 3, Part. B.									
	1	**2**	**3**	**4**					
Ex. 3, Part. C.									
	1	**2**	**3**	**4**					
Exercice 4.									

Le corrigé se trouve sur `http://sifoci.eisti.fr`***, rubrique Analyse numérique.***

Exercice 1 :

Considérons un ordinateur décimal et soit un réel $x \in \mathbb{R}$. Notons par $fl(x)$ un nombre flottant de l'ordinateur qui est l'approximation par arrondi avec k digits de x. Montrer que

$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leq 0.5 \times 10^{-k+1}$$

SOL.- En notation scientifique on a $x = 0.d_1 d_2 \cdots d_k d_{k+1} \cdots \times 10^n$. Si $d_{k+1} < 5$, alors $fl(x) = 0.d_1 d_2 \cdots d_k \times 10^n$ et $\frac{|x-fl(x)|}{|x|} = \frac{|0.00\cdots 0 d_{k+1}\cdots|}{|0.d_1 d_2 \cdots|} \leq \frac{5\times 10^{-k-1}}{0.1} \leq 5\times 10^{-k} = 0.5\times 10^{-k+1}$. Si $d_{k+1} \geq 5$, alors $fl(x) = \left(0.d_1 d_2 \cdots d_k + 10^{-k}\right)\times 10^n$ et $\frac{|x-fl(x)|}{|x|} = \frac{|0.00\cdots 0 d_{k+1}\cdots| - 10^{-k}}{|0.d_1 d_2\cdots|} \leq \frac{5\times 10^{-k-1}}{0.1} = 0.5 \times 10^{-k+1}$.

Exercice 2 :

Soit la fonction

$$f(y) = \frac{1}{1+y} - \frac{1}{1-y}; y \in \left]-1, 1\right[$$

1. Calculer le nombre-condition de f. Conclusion.
2. Donner un algorithme pour le calcul de f .
3. Évaluer l'erreur de calcul Δf selon cet algorithme.
4. Proposer une autre façon de calculer cette fonction et vérifier que le calcul est cette fois-ci bien conditionné.

SOL.-

1. Nombre-condition de $f(y) = \left|\frac{\frac{-1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1-y)^2}}{\frac{1}{1+y} - \frac{1}{1-y}}\right| = \left|\frac{2y}{1-y^2}\right|$. Donc la fonction est mal conditionnée si $|y| \simeq 1$.
2. On pose $w = \frac{1}{1+y}, z = \frac{1}{1-y}$. Algorithme :

```
r <--  1/(x+1)
q <-- 1/(x-1)
s <-- r - q
```

3. $\Delta f = \begin{bmatrix} -\frac{1}{w^2} & \frac{1}{z^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta w \\ \Delta z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{z^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{w} \\ -\frac{1}{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{w} \\ -\frac{1}{z} \end{bmatrix} + \eta_3 \left(\frac{1}{w} - \frac{1}{z}\right)$
   d'où
   $|\Delta f| = \left|-\frac{1}{w^2}\Delta w + \frac{1}{z^2}\Delta z + \eta_1 \frac{1}{w} - \eta_2 \frac{1}{z} + \eta_3 \left(\frac{1}{w} - \frac{1}{z}\right)\right| \leq A + 2\left|\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{z}\right)\right| eps.$
4. Pour éviter le mauvais conditionnement si $|x| \simeq 1$ on peut poser $f(y) = \frac{-2y}{1-x^2}$. On a
   $f(x) = \left|\frac{\frac{-2\left(1-y^2\right)+4y}{\left(1-y^2\right)^2}}{\frac{-2y}{1-x^2}} y\right| = \left|\frac{1+x^2}{1-y^2}\right|$ qui est bien conditionné pour $y \in \left]-1, 1\right[$.

Exercice 3 :

Soit la matrice $\mathbf{A}$ définie par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

PARTIE A : DÉCOMPOSITION **LU** DE **A**.

1. Expliciter la structure des matrices **L** et **U** et justifier votre réponse. On ne demande pas de calcul.
   SOL.- **L** est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et ne comporte qu'une sous diagonale non nulle car elle "hérite" de la structure bande de **A**.
   U est triangulaire supérieure et ne comporte qu'une sur diagonale non nulle car elle "hérite" de la structure bande de **A**. On a donc

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \times & \times & \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \times & 1 & 0 \\ 0 & \times & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

2. On note u_{ij} les éléments de la matrice $\mathbf{U}$, et l_{ij} ceux de $\mathbf{L}$.

   (a) Calculer la matrice $\mathbf{U}$
   SOL.- On trouve
   $$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

   (b) Calculer la matrice $\mathbf{L}$
   SOL.- On trouve
   $$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

3. En déduire le déterminant de la matrice $\mathbf{A}$.

   SOL.- $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{LU}) = \det(\mathbf{L}).\det(\mathbf{U}) = \det(\mathbf{U}) = \prod_{i=1}^{3} u_{ii} = 1$

4. La matrice $\mathbf{A}$ est-elle inversible ? Justifiez votre réponse.
   SOL.- $\det(\mathbf{A}) = 1$ non nul donc $\mathbf{A}$ est inversible

5. On veut résoudre le système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ avec $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Expliquer la démarche qui permet de résoudre ce système à l'aide de la décomposition $\mathbf{LU}$.
   SOL.- On résout $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ en remplaçant par $\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$ donc on résout successivement
   $$\begin{array}{rll} \mathbf{Ly} & = \mathbf{b} & \text{pour trouver } \mathbf{y} \\ \text{puis } \mathbf{Ux} & = \mathbf{y} & \text{pour trouver } \mathbf{x} \end{array}$$

   (b) Donner les deux algorithmes impliqués dans cette démarche, en les adaptant au cas présent
   SOL.- pour résoudre $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ on utilise un algorithme de descente, donné par :

   $x_1 \leftarrow b_1$
   `Pour i de 2 à 3`
   $$x_i \leftarrow \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{i,j} x_j \right)$$
   `FinPour i`

   Du fait des valeurs de L on obtient :

   $x_1 \leftarrow b_1$
   `Pour i de 2 à 3`
   $x_i \leftarrow b_i - l_{i,i-1} x_{i-1}$
   `FinPour i`

   Pour résoudre $Ux = y$, on utilise un algorithme de remontée donné par :

   $x_n \leftarrow y_n$
   `Pour i de 2 à 1 par pas de -1`
   $$x_i \leftarrow \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{3} u_{i,j} x_j \right)$$
   `FinPour i`

   Du fait des valeurs de U on obtient :

   $x_3 \leftarrow y_3$
   `Pour i de 2 à 1 par pas de -1`
   $x_i \leftarrow y_i - u_{i,i+1} x_{i+1}$
   `FinPour i`

(c) Déroulez les étapes de ces algorithmes pour trouver la variable intermédiaire $\mathbf{y}$ solution de $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ puis celle du système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

SOL.-
$y_1 \leftarrow b_1$
`Pour i de 2 à 3`
$\quad y_i \leftarrow b_i - l_{i,i-1} y_{i-1}$
`FinPour i`
donne

$y_1 = 1$
$y_2 \leftarrow b_2 - l_{2,1} y_1 = 2 - 1 * 1 = 1$
$y_3 \leftarrow b_3 - l_{3,2} y_2 = 2 - 1 * 1 = 1$
Finalement $y = (1, 1, 1)$. Vérification :

$$L * y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = b \tag{5}$$

Ensuite
$x_3 \leftarrow y_3$
`Pour i de 2 à 1 par pas de -1`
$\quad x_i \leftarrow y_i - u_{i,i+1} x_{i+1}$
`FinPour i`
donne

$x_3 = 1$
$x_2 = y_2 - u_{2,3} x_3 = 1 - 1 * 1 = 0$
$x_1 = y_1 - u_{1,2} x_2 = 1 - 1 * 0 = 1$
Finalement on a $\mathbf{x} = [1, 0, 1]$. Vérifions

$$\mathbf{Ux} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{y} \tag{6}$$

PARTIE B : INTERLUDE D'ANALYSE

1. Pour toute matrice symétrique $\mathbf{S}$ déterminer $\|\mathbf{y}\|_2$ en fonction des valeurs propres de $\mathbf{S}$.
SOL.- D'après les propriétés de la norme 2 on a

$$\|\mathbf{S}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{S}^*\mathbf{S})} \tag{7}$$

De la symétrie de $\mathbf{S}$, on déduit

$$\|\mathbf{S}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{S}^2)} \tag{8}$$

Or les valeurs propres de $\mathbf{S}^2$ sont les carrés des valeurs propres de A donc

$$\|\mathbf{S}\|_2 = \rho(\mathbf{S}) = |\lambda_n| \tag{9}$$

où λ_n est la plus grande valeur propre de $\mathbf{S}$ en module.

2. Déterminer $\|\mathbf{S}^{-1}\|_2$en fonction des valeurs propres de $\mathbf{S}$.
SOL.- La matrice $\mathbf{S}$ est symétrique donc son inverse l'est aussi. On déduit donc comme précédemment que

$$\|\mathbf{S}^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{S}^{-1*}\mathbf{S}^{-1})} = \sqrt{\rho(\mathbf{S}^{-2})} = \rho(\mathbf{S}^{-1}) \tag{10}$$

Les valeurs propres de $\mathbf{S}^{-1}$ sont les inverses des valeurs propres de $\mathbf{S}$ donc la plus grande valeur propre de $\mathbf{S}^{-1}$ est l'inverse de la plus petite valeur propre de $\mathbf{S}$, d'où

$$\|\mathbf{S}^{-1}\|_2 = 1/|\lambda_1| \tag{11}$$

3. En déduire le conditionnement de $\mathbf{S}$ en norme 2.
   SOL.-
$$cond_2(\mathbf{S}) = \|\mathbf{S}\|_2 \left\|\mathbf{S}^{-1}\right\|_2 = \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|} \tag{12}$$
4. Estimez les valeurs propres extrémales de $\mathbf{A}$ en utilisant la méthode des cercles de Gersgorin .
   SOL.- un cercle de centre 1 et de rayon 1, un cercle de centre 2 et de rayon 1, un cercle de centre 2 et de rayon 2. La matrice est symétrique donc les cercles ligne et colonne sont confondus. Les trois cercles s'intersectent donc on ne peut pas savoir combien de valeurs propres sont réelles a priori (1 ou 3) mais comme A est symétrique, on sait que les 3 valeurs propres sont réelles. Elles sont comprises entre 0 (strictement puisque $\mathbf{A}$ est inversible) et 4.
5. Pouvez-vous en déduire une estimation du conditionnement de $\mathbf{A}$, relativement à la norme 2 ?
   SOL.- non puisque le minimum est zéro.

PARTIE C : MÉTHODE DE JACOBI POUR RÉSOUDRE LE SYSTÈME $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

1. Déterminer la matrice d'itération de Jacobi, notée $\mathbf{J}$.
   SOL.-
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{D} - (\mathbf{E} + \mathbf{F}) \tag{13}$$
   avec
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{E} + \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$
$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{E} + \mathbf{F}) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$
2. La méthode est-elle convergente ? Justifiez votre réponse.
   SOL.- On cherche les valeurs propres de $\mathbf{J}$.
$$\begin{aligned} \det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\lambda \\ &= \lambda\left[\frac{1}{4} - \lambda^2 + \frac{1}{2}\right] = \lambda\left[\frac{3}{4} - \lambda^2\right] = \lambda\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda\right]\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \lambda\right] \end{aligned}$$
   Les valeurs propres sont donc
$$\begin{aligned} \lambda &= 0 \\ \lambda &= \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$
   Le rayon spectral de $\mathbf{J}$ est donc égal à $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$: la méthode converge.
3. Etablir l'expression générale d'un itéré $\mathbf{x}^{(k+1)}$ en fonction de $\mathbf{x}^{(k)}$
   SOL.-
$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^{(k+1)} &= -\mathbf{x}_2^{(k)} + 1 \\ \mathbf{x}_2^{(k+1)} &= -\frac{1}{2}\mathbf{x}_1^{(k)} - \frac{1}{2}\mathbf{x}_3^{(k)} + 1 \\ \mathbf{x}_3^{(k+1)} &= -\frac{1}{2}\mathbf{x}_2^{(k)} + 1 \end{aligned}$$

4. Une simulation numérique a été effectuée sous Scilab. on a représenté les coordonnées du vecteur $\mathbf{x}^{(k)}$ en fonction du numéro d'itération k, en partant de $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 1, 1]$ Lequel des trois graphiques ci-dessous est-il celui obtenu ? Justifiez votre réponse.

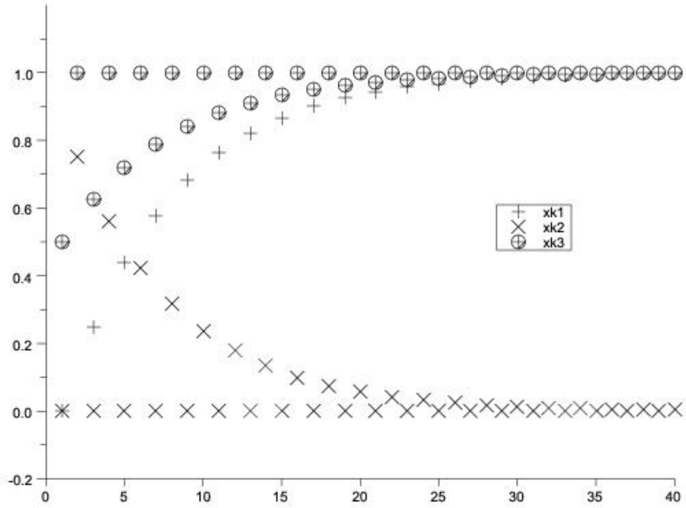

FIGURE 1 – (a)

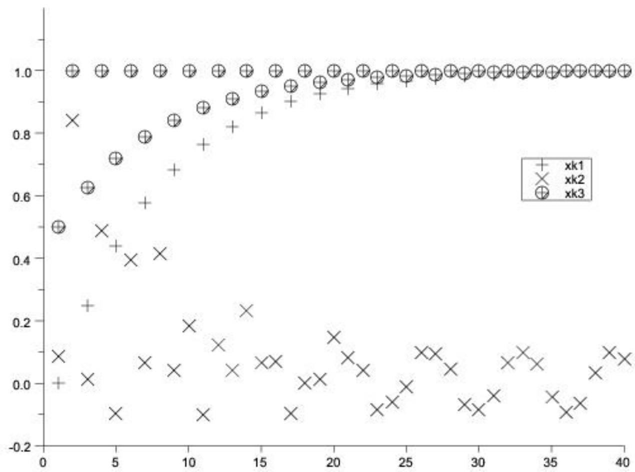

FIGURE 2 – (b)

SOL.- le second. Car le premier montre que $\mathbf{x}_1^{(k)}$ converge vers 0.5, ce qui n'est pas la valeur de la seconde composante de la solution, le troisième montre que $\mathbf{x}_2^{(k)}$ ne converge pas.

Exercice 1 :

Soit $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice diagonale $\mathbf{D} = \mathrm{diag}\,(d_1, \cdots, d_n)$, avec $d_i \neq d_j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$. Considérons une perturbation $\varepsilon\mathbf{A}$ de cette matrice avec $\varepsilon \in \mathbb{R}$ petit et $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Supposons que la matrice $\mathbf{D} + \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{A}$ a comme valeur propre $\lambda + \varepsilon\mu$ et vecteur propre associé $\mathbf{e} + \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{u}$.

1. Montrer que $\lambda = d_j$ pour un $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

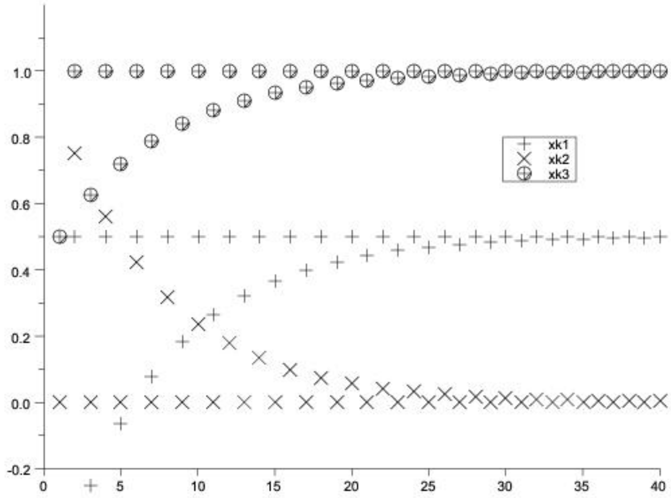

FIGURE 3 – (c)

2. Montrer que le vecteur $\mathbf{e}$ a toutes ses composantes nulles sauf la j-ième qui est égale à 1.
3. Montrer que $\mu = a_{jj}$.
4. Montrer que $u_k = -\frac{a_{kj}}{d_{kk}-\lambda}$, $k \neq j$

N.B. On considère que $\varepsilon^2 \simeq 0$.

SOL.-

1. On a $(\mathbf{D} + \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{A})(\mathbf{e} + \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{u}) = (\lambda + \varepsilon\mu)(\mathbf{e} + \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{u})$. En égalisant les coefficients de même puissance pour ε on a $\mathbf{De} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{e}$ et $\mathbf{Du} + \mathbf{Ae} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{u} + \boldsymbol{\mu}\mathbf{e}$.
   $\mathbf{D}$ est diagonale, donc la première relation donne $\lambda = d_j$ pour un $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
2. On a $\mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)\,\mathbf{e} = d_j\mathbf{e}$ et par conséquent les composantes de $\mathbf{e}$ sont nulles sauf la j-ième qui est égale à 1.
3. La deuxième relation s'écrit pour une ligne k :

$$d_k u_k + a_{ij} = d_j u_k + \mu\delta_{kj}\ ;\ 1 \leq k \leq n \text{ et avec } \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

   d'où on a $\mu = a_{jj}$ pour $k = j$.
4. Si dans la relation précédente on pose $k \neq j$ on a $u_k = -\frac{a_{kj}}{d_{kk}-\lambda}$.