



Correction Partielle Session 1

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie sur $] - 1, 1[$ par

$$f(y) = \frac{1}{1+y} - \frac{1}{1-y}$$

1. Calculer le nombre condition de f .

On a

$$\kappa_f = \left| \frac{f'(y)}{f(y)} y \right|$$

Or

$$\begin{aligned} f'(y) &= \frac{-1}{(1+y)^2} - \frac{1}{(1-y)^2} \\ &= -\frac{(1-y)^2 + (1+y)^2}{(1-y)^2 (1+y)^2} = -\frac{1-2y+y^2+1+2y+y^2}{(1-y)^2 (1+y)^2} \\ &= -2\frac{1+y^2}{(1-y)^2 (1+y)^2} \end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{1+y} - \frac{1}{1-y} \\ &= \frac{1-y-1-y}{1-y^2} = -\frac{2y}{1-y^2} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \kappa_f &= \left| -2\frac{1+y^2}{(1-y)^2 (1+y)^2} \left(-\frac{1-y^2}{2y} \right) y \right| \\ &= \left| \frac{1+y^2}{(1-y)^2 (1+y)^2} (1-y)(1+y) \right| = \left| \frac{1+y^2}{(1-y)(1+y)} \right| \end{aligned}$$

On conclut que lorsque y est voisin de 1 et de -1, la quantité κ_f peut prendre de très grandes valeurs. En effet le dénominateur tend vers 0, alors que le numérateur tend vers 2 (toute forme indéterminée ne donne aucune conclusion pertinente).

2. Pour calculer f , on utilise l'algorithme suivant (d'autres réponses peuvent être correctes):

$$x_0 = y \mapsto \phi_1(x_0) = \begin{pmatrix} 1+y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = x_1 \mapsto \phi_2(x_1) = \begin{pmatrix} u \\ 1-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} =$$

$$x_2 \mapsto \phi_3(x_2) = \begin{pmatrix} 1/u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} = x_3 \mapsto \phi_4(x_3) = \begin{pmatrix} w \\ 1/v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ t \end{pmatrix} = x_4 \mapsto$$

$$\phi_5(x_4) = w - t.$$

Ainsi on a $\phi = \phi_5 \circ \phi_4 \circ \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1$

3. Evaluation de l'erreur

(a) Calcul des fonctions Ψ_k (ce qui reste à faire après k étapes).

$\Psi_1 = \phi_5 \circ \phi_4 \circ \phi_3 \circ \phi_2$. Les variables d'entrée de Ψ_1 sont celles que prend en entrée ϕ_2 . De nombreux élèves ont commis l'erreur à ce niveau là et dans toutes les fonctions Ψ_k , rendant de ce fait des jacobiniennes absurdes.

$$\Psi_1 \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = \phi_5 \circ \phi_4 \circ \phi_3 \circ \phi_2 \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{u} - \frac{1}{1-y}$$

$$\Psi_2 = \phi_5 \circ \phi_4 \circ \phi_3 \text{ donc } \Psi_2 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \phi_5 \circ \phi_4 \circ \phi_3 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{u} - \frac{1}{v}$$

$$\Psi_3 = \phi_5 \circ \phi_4 \text{ donc } \Psi_3 \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} = \phi_5 \circ \phi_4 \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} = w - \frac{1}{v}$$

$$\Psi_4 = \phi_5 \text{ donc } \Psi_4 \begin{pmatrix} w \\ t \end{pmatrix} = \phi_5 \begin{pmatrix} w \\ t \end{pmatrix} = w - t$$

(b) Calcul des matrices jacobiniennes des fonctions Ψ_k : on dérive par rapport à chaque variable un résultat toujours scalaire

$$J\Psi_1 \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{u^2} & -\frac{1}{(1-y)^2} \end{pmatrix}$$

$$J\Psi_2 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{u^2} & \frac{1}{v^2} \end{pmatrix}$$

$$J\Psi_3 \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{v^2} \end{pmatrix}$$

$$J\Psi_4 \begin{pmatrix} w \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Jacobienne de ϕ :

$$J\phi(y) = \frac{-1}{(1+y)^2} - \frac{1}{(1-y)^2}$$

(c) Calcul des matrices des erreurs H_k (matrice comportant un facteur diagonal non nul sur la position de la variable modifiée à l'étape correspondante):

$$H_1 = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} \eta_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta_4 \end{pmatrix}, H_5 = (\eta_5)$$

(d) Formule de l'erreur. Du cours on déduit :

$$\Delta f = J\phi(y).\Delta y + J\Psi_1(x_1).H_1.x_1 + J\Psi_2(x_2).H_2.x_2 + \dots + J\Psi_{r-1}(x_{r-1}).H_{r-1}.x_{r-1} + H_r.f(y)$$

Ici on a donc

$$\begin{aligned} \Delta f &= \left(\frac{-1}{(1+y)^2} - \frac{1}{(1-y)^2} \right) \cdot \Delta y + \\ &\quad \left(-\frac{1}{u^2} \quad -\frac{1}{(1-y)^2} \right) \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{u^2} \quad \frac{1}{v^2} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &\quad + \left(1 \quad \frac{1}{v^2} \right) \begin{pmatrix} \eta_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} + \left(1 \quad -1 \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ t \end{pmatrix} \\ &\quad + (\eta_5) \cdot \left(\frac{1}{1+y} - \frac{1}{1-y} \right) \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \Delta f &= \left(\frac{-1}{(1+y)^2} - \frac{1}{(1-y)^2} \right) \cdot \Delta y + \\ &\quad \eta_1 \left(-\frac{1}{u^2} \right) u + \eta_2 \left(\frac{1}{v^2} \right) \cdot v \\ &\quad + \eta_3 w - \eta_4 t \\ &\quad + (\eta_5) \cdot \left(\frac{1}{1+y} - \frac{1}{1-y} \right) \end{aligned}$$

En revenant à la variable y , on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta f &= \left(\frac{-1}{(1+y)^2} - \frac{1}{(1-y)^2} \right) \cdot \Delta y - \eta_1 \frac{1}{1+y} + \eta_2 \frac{1}{1-y} \\ &\quad + \eta_3 \frac{1}{1+y} - \eta_4 \frac{1}{1-y} \\ &\quad + \eta_5 \cdot \left(\frac{1}{1+y} - \frac{1}{1-y} \right) \end{aligned}$$

En majorant chaque erreur η_i par ε en valeur absolue, on tire :

$$|\Delta f| = \left| \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1-y)^2} \right| \cdot |\Delta y| + \left[\left| \frac{1}{1+y} \right| + \left| \frac{1}{1-y} \right| + \left| \frac{1}{1+y} \right| + \left| \frac{1}{1-y} \right| + \left| \left(\frac{1}{1+y} - \frac{1}{1-y} \right) \right| \right]$$

soit

$$|\Delta f| = \left| \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1-y)^2} \right| \cdot |\Delta y| + 3 \left[\left| \frac{1}{1+y} \right| + \left| \frac{1}{1-y} \right| \right] \varepsilon$$

si on majore aussi le dernier terme.

4. Proposer une autre façon de calculer cette fonction et vérifier que le calcul est cette fois-ci bien conditionné.

SOL : On utilise une forme sur le même dénominateur : $f(y) = \frac{-2y}{1-y^2}$.

Exercice 3 :

Soit la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie A : On s'intéresse à la décomposition LU de A .

1. Expliciter la structure des matrices L et U et justifier votre réponse. On ne demande pas de calcul.

SOL : L est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et ne comporte qu'une sous diagonale non nulle car elle "hérite" de la structure bande de A .

U est triangulaire supérieure et ne comporte qu'une sur diagonale non nulle car elle "hérite" de la structure bande de A . On a donc

$$U = \begin{pmatrix} \times & \times & \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix} \text{ et } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \times & 1 & 0 \\ 0 & \times & 1 \end{pmatrix}$$

2. On note u_{ij} les éléments de la matrice U , et l_{ij} ceux de L .

- (a) Calculer la matrice U

SOL : On trouve

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Calculer la matrice L

SOL : On trouve

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. En déduire le déterminant de la matrice A .

SOL : $\det(A) = \det(LU) = \det(L) \cdot \det(U) = \det(U) = \prod_{i=1}^3 u_{ii} = 1$

4. La matrice A est-elle inversible ? Justifiez votre réponse.

SOL : $\det(A) = 1$ non nul donc A est inversible

5. On veut résoudre le système $Ax = b$ avec $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- (a) Expliquer la démarche qui permet de résoudre ce système à l'aide de la décomposition LU .

SOL : On résout $Ax = b$ en remplaçant par $LUx = b$ donc on résout successivement

$$\begin{aligned} Ly &= b \text{ pour trouver } y \\ \text{puis } Ux &= y \text{ pour trouver } x \end{aligned}$$

- (b) Donner les deux algorithmes impliqués dans cette démarche, en les adaptant au cas présent

SOL : pour résoudre $Ly = b$ on utilise un algorithme de descente, donné par :

$x_1 \leftarrow b_1$
Pour i de 2 à 3

$$x_i \leftarrow \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{i,j} x_j \right)$$

FinPour i

Du fait des valeurs de L on obtient :

$x_1 \leftarrow b_1$
Pour i de 2 à 3
 $x_i \leftarrow b_i - x_{i-1}$
FinPour i

Pour résoudre $Ux = y$, on utilise un algorithme de remontée donné par :

$x_n \leftarrow y_n$
Pour i de 2 à 1 par pas de -1

$$x_i \leftarrow \left(y_i - \sum_{j=i+1}^3 u_{i,j} x_j \right)$$

FinPour i

Du fait des valeurs de U on obtient :

$x_3 \leftarrow y_3$
Pour i de 2 à 1 par pas de -1
 $x_i \leftarrow y_i - x_{i+1}$
FinPour i

- (c) Déroulez les étapes de ces algorithmes pour trouver la variable intermédiaire y solution de $Ly = b$ puis celle du système $Ax = b$.

$y_1 \leftarrow b_1$
SOL : **Pour i de 2 à 3** donne
 $y_i \leftarrow b_i - l_{i,i-1} y_{i-1}$
FinPour i

$y_1 = 1$

$y_2 \leftarrow b_2 - l_{2,1} y_1 = 2 - 1 * 1 = 1$

$y_3 \leftarrow b_3 - l_{3,2} y_2 = 2 - 1 * 1 = 1$

Enfinement $y = (1, 1, 1)$. Vérification :

$$L * y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = b$$

Ensuite

$x_3 \leftarrow y_3$
Pour i de 2 à 1 par pas de -1 donne
 $x_i \leftarrow y_i - u_{i,i+1} x_{i+1}$
FinPour i

$x_3 = 1$

$x_2 = y_2 - u_{2,3} x_3 = 1 - 1 * 1 = 0$

$x_1 = y_1 - u_{1,2} x_2 = 1 - 1 * 0 = 1$

Finalement on a $x = (1, 0, 1)$. Vérifions

$$Ux = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = y$$

Partie B : Interlude d'analyse

1. Pour toute matrice symétrique S déterminer $\|S\|_2$ en fonction des valeurs propres de S .
SOL : D'après les propriétés de la norme 2 on a

$$\|S\|_2 = \sqrt{\rho(S^*S)}$$

De la symétrie de S , on déduit

$$\|S\|_2 = \sqrt{\rho(S^2)}$$

Or les valeurs propres de S^2 sont les carrés des valeurs propres de A donc

$$\|S\|_2 = \rho(S) = |\lambda_n|$$

où λ_n est la plus grande valeur propre de S en module.

2. Déterminer $\|S^{-1}\|_2$ en fonction des valeurs propres de S .
SOL : La matrice S est symétrique donc son inverse l'est aussi. On déduit donc comme précédemment que

$$\|S^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho(S^{-1*}S^{-1})} = \sqrt{\rho(S^{-2})} = \rho(S^{-1})$$

Les valeurs propres de S^{-1} sont les inverses des valeurs propres de S donc la plus grande valeur propre de S^{-1} est l'inverse de la plus petite valeur propre de S , d'où

$$\|S^{-1}\|_2 = 1/|\lambda_1|$$

3. En déduire le conditionnement de S en norme 2.

SOL :

$$\text{cond}_2(S) = \|S\|_2 \|S^{-1}\|_2 = \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|}$$

4. Estimez les valeurs propres extrémales de A en utilisant la méthode des cercles de Gersgorin .

SOL : un cercle de centre 1 et de rayon 1, un cercle de centre 2 et de rayon 1, un cercle de centre 2 et de rayon 2. La matrice est symétrique donc les cercles ligne et colonne sont confondus. Les trois cercles s'intersectent donc on ne peut pas savoir combien de valeurs propres sont réelles a priori (1 ou 3) mais comme A est symétrique, on sait que les 3 valeurs propres sont réelles. Elles sont comprises entre 0 (strictement puisque A est inversible) et 4.

5. Pouvez-vous en déduire une estimation du conditionnement de A , relativement à la norme 2 ?

SOL: non puisque le minimum est zéro.

Partie C : On s'intéresse à la méthode de Jacobi pour résoudre le système $Ax = b$

1. Déterminer la matrice d'itération de Jacobi, notée J .

SOL :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = D - (E + F)$$

avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, E + F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} J &= D^{-1}(E + F) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. La méthode est-elle convergente ? Justifiez votre réponse.

SOL : On cherche les valeurs propres de J .

$$\begin{aligned} \det(J - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \left(\lambda^2 - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2}\lambda \\ &= \lambda \left[\frac{1}{4} - \lambda^2 + \frac{1}{2} \right] = \lambda \left[\frac{3}{4} - \lambda^2 \right] = \lambda \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda \right] \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \lambda \right] \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont donc

$$\begin{aligned} \lambda &= 0 \\ \lambda &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

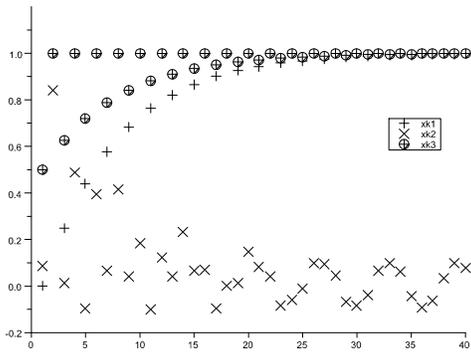
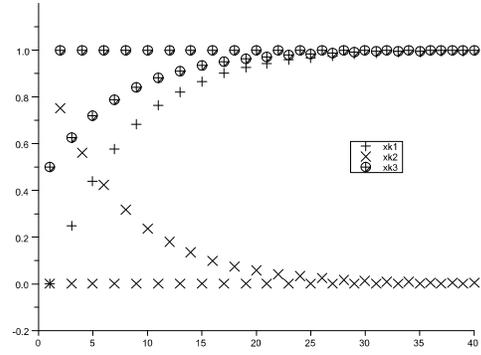
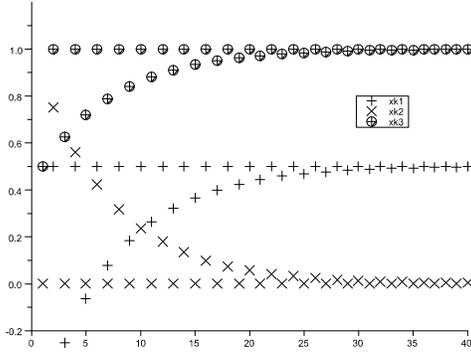
Le rayon spectral de J est donc égal à $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$: la méthode converge.

3. Etablir l'expression générale d'un itéré $\mathbf{x}^{(k+1)}$ en fonction de $\mathbf{x}^{(k)}$

SOL :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^{(k+1)} &= -\mathbf{x}_2^{(k)} + 1 \\ \mathbf{x}_2^{(k+1)} &= -\frac{1}{2}\mathbf{x}_1^{(k)} - \frac{1}{2}\mathbf{x}_3^{(k)} + 1 \\ \mathbf{x}_3^{(k+1)} &= -\frac{1}{2}\mathbf{x}_2^{(k)} + 1 \end{aligned}$$

4. Une simulation numérique a été effectuée sous Scilab. on a représenté les coordonnées du vecteur $\mathbf{x}^{(k)}$ en fonction du numéro d'itération k , en partant de $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)$ Lequel des trois graphiques ci-dessous est-il celui obtenu ? Justifiez votre réponse.



5.

SOL : le second. Car le premier montre que $\mathbf{x}_1^{(k)}$ converge vers 0.5, ce qui n'est pas la valeur de la seconde composante de la solution, le troisième montre que $\mathbf{x}_2^{(k)}$ ne converge pas.