ANALYSE NUMÉRIQUE II

COURS 1

MÉTHODES DIRECTES POUR LA RÉSOLUTION DE SYSTÈMES LINÉAIRES

Ch. Baskiotis

LAPI – EISTI

25 janvier 2009

Objectif

Objectif.- Résoudre les problèmes suivants (entre autres) :

– Solution du système d'équations linéaires

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ avec } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Objectif

Objectif.- Résoudre les problèmes suivants (entre autres) :

– Solution du système d'équations linéaires

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ avec } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

– Inverse d'une matrice

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$$

Méthodes directes

Deux grandes familles de méthodes :

– ***directes*** et

– ***itératives***.

Méthodes directes

Deux grandes familles de méthodes :

- *directes* et
- *itératives*.

Les méthodes directes établissent la solution en un nombre fini et prédéterminé d'étapes.

Méthodes directes

Deux grandes familles de méthodes :
- ***directes*** et
- ***itératives***.

Les méthodes directes établissent la solution en un nombre fini et prédéterminé d'étapes.
Ce nombre est fonction de la taille de la matrice.

Méthodes directes

Deux grandes familles de méthodes :
- ***directes*** et
- ***itératives***.

Les méthodes directes établissent la solution en un nombre fini et prédéterminé d'étapes.
Ce nombre est fonction de la taille de la matrice.

Méthodes de cette famille :
- Pivot de Gauss ;

Méthodes directes

Deux grandes familles de méthodes :
- ***directes*** et
- ***itératives***.

Les méthodes directes établissent la solution en un nombre fini et prédéterminé d'étapes.
Ce nombre est fonction de la taille de la matrice.

Méthodes de cette famille :
- Pivot de Gauss ;
- Décomposition ou factorisation $\mathbf{LU}$;

Méthodes directes

Deux grandes familles de méthodes :
– ***directes*** et
– ***itératives***.

Les méthodes directes établissent la solution en un nombre fini et prédéterminé d'étapes.
Ce nombre est fonction de la taille de la matrice.

Méthodes de cette famille :
– Pivot de Gauss ;
– Décomposition ou factorisation $\mathbf{LU}$;
– Méthode de Cholesky ;
– ...

Fini mais pas petit

Le nombre d'étapes est fini et prédéterminé mais pas forcement petit.

Fini mais pas petit

Le nombre d'étapes est fini et prédéterminé mais pas forcement petit.

Exemple : Méthode de Cramer ou méthode des déterminants :
Système avec 100 inconnues et 100 équations.

Fini mais pas petit

Le nombre d'étapes est fini et prédéterminé mais pas forcement petit.

Exemple : Méthode de Cramer ou méthode des déterminants :
Système avec 100 inconnues et 100 équations.
On doit exécuter 9.4×10^{161} opérations élémentaires.

Fini mais pas petit

Le nombre d'étapes est fini et prédéterminé mais pas forcement petit.

Exemple : Méthode de Cramer ou méthode des déterminants :
Système avec 100 inconnues et 100 équations.
On doit exécuter 9.4×10^{161} opérations élémentaires.

$\Rightarrow$ sur un ordinateur à 1 gigaflop opérations élémentaires par seconde,
il faut 3×10^{145} années pour finir les calculs !

Fini mais pas petit

Le nombre d'étapes est fini et prédéterminé mais pas forcement petit.

Exemple : Méthode de Cramer ou méthode des déterminants :
Système avec 100 inconnues et 100 équations.
On doit exécuter 9.4×10^{161} opérations élémentaires.

$\Rightarrow$ sur un ordinateur à 1 gigaflop opérations élémentaires par seconde, il faut 3×10^{145} années pour finir les calculs !

$\Rightarrow$ Élaborer des méthodes rapides.

Principe des méthodes directes I

Remplacer la résolution du système

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

par un système plus facile à résoudre

Principe des méthodes directes I

Remplacer la résolution du système

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

par un système plus facile à résoudre
Par exemple par un système *équivalent* de matrice triangulaire ou diagonale.

Principe des méthodes directes I

Remplacer la résolution du système

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

par un système plus facile à résoudre
Par exemple par un système *équivalent* de matrice triangulaire ou diagonale.

<u>1ère idée</u> : Diagonaliser $\mathbf{A} \Rightarrow$ solution immédiate.

Principe des méthodes directes I

Remplacer la résolution du système

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

par un système plus facile à résoudre
Par exemple par un système *équivalent* de matrice triangulaire ou diagonale.

<u>1ère idée</u> : Diagonaliser $\mathbf{A} \Rightarrow$ solution immédiate.

<u>MAIS</u> diagonaliser une matrice $\equiv$ calculer ses éléments propres

Principe des méthodes directes I

Remplacer la résolution du système

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

par un système plus facile à résoudre
Par exemple par un système *équivalent* de matrice triangulaire ou diagonale.

1ère idée : Diagonaliser $\mathbf{A} \Rightarrow$ solution immédiate.

MAIS diagonaliser une matrice $\equiv$ calculer ses éléments propres

$\Rightarrow$ Problème difficile à résoudre.

Principe des méthodes directes II

<u>2e idée</u> : Remplacer $\mathbf{A}$ par une matrice triangulaire supérieure et calculer ensuite la solution par substitution inverse.

Principe des méthodes directes II

2e idée : Remplacer $\mathbf{A}$ par une matrice triangulaire supérieure et calculer ensuite la solution par substitution inverse.

$\Longrightarrow$ Pivot de Gauss

Principe des méthodes directes II

2e idée : Remplacer $\mathbf{A}$ par une matrice triangulaire supérieure et calculer ensuite la solution par substitution inverse.

$\Rightarrow$ Pivot de Gauss

3e idée : Remplacer $\mathbf{A}$ par le produit de deux matrices triangulaires, notées $\mathbf{L}$ ***triangulaire inférieure***, et

Principe des méthodes directes II

2e idée : Remplacer $\mathbf{A}$ par une matrice triangulaire supérieure et calculer ensuite la solution par substitution inverse.

$\Rightarrow$ Pivot de Gauss

3e idée : Remplacer $\mathbf{A}$ par le produit de deux matrices triangulaires, notées
$\mathbf{L}$ ***triangulaire inférieure***, et
$\mathbf{U}$ ***triangulaire supérieure***

Principe des méthodes directes II

2e idée : Remplacer $\mathbf{A}$ par une matrice triangulaire supérieure et calculer ensuite la solution par substitution inverse.

$\Rightarrow$ Pivot de Gauss

3e idée : Remplacer $\mathbf{A}$ par le produit de deux matrices triangulaires, notées
$\mathbf{L}$ ***triangulaire inférieure***, et
$\mathbf{U}$ ***triangulaire supérieure***

On résout alors successivement deux systèmes triangulaires :

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b} \text{ puis } \mathbf{Ux} = \mathbf{y} \text{ d'où } \mathbf{LUx} = \mathbf{Ly} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

Principe des méthodes directes II

2e idée : Remplacer $\mathbf{A}$ par une matrice triangulaire supérieure et calculer ensuite la solution par substitution inverse.

$\Rightarrow$ Pivot de Gauss

3e idée : Remplacer $\mathbf{A}$ par le produit de deux matrices triangulaires, notées
$\mathbf{L}$ *triangulaire inférieure*, et
$\mathbf{U}$ *triangulaire supérieure*

On résout alors successivement deux systèmes triangulaires :

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b} \text{ puis } \mathbf{Ux} = \mathbf{y} \text{ d'où } \mathbf{LUx} = \mathbf{Ly} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{LU}$$

$\Rightarrow$ Décomposition $\mathbf{LU}$.

Pivot de Gauss

Idée de base : transformer en $(n-1)$ étapes le système donné en un système équivalent $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$ où $\mathbf{U}$ matrice triangulaire supérieure :

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Pivot de Gauss

Idée de base : transformer en $(n-1)$ étapes le système donné en un système équivalent $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$ où $\mathbf{U}$ matrice triangulaire supérieure :

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

et de résoudre ensuite ce système par substitution inverse selon la formule

$$x_{n-k} = \frac{1}{u_{n-k,n-k}} \left(c_{n-k} - \sum_{\ell=0}^{k-1} u_{n-k,n-\ell} x_{n-\ell} \right) ; \; k = 0, \ldots, n-1$$

Gauss sur un petit exemple

Soit le système

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Gauss sur un petit exemple

Soit le système

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

que nous pouvons écrire, en référence à la 1ère itération,

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} \\ a_{41}^{(1)} & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ b_4^{(1)} \end{bmatrix}$$

« Le commencement est la moitié du tout » – I

On considére la première itération effectuée sur la première ligne.

« Le commencement est la moitié du tout » – I

On considére la première itération effectuée sur la première ligne.

Soit $a_{11} \neq 0$. a_{11} est appelé ***pivot*** et sera noté par π_1.

« Le commencement est la moitié du tout » – I

On considére la première itération effectuée sur la première ligne.

Soit $a_{11} \neq 0$. a_{11} est appelé ***pivot*** et sera noté par π_1.

Considérons la première ligne du système

$a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + a_{14}^{(1)} x_4 = b_1^{(1)}$

« Le commencement est la moitié du tout » – I

On considére la première itération effectuée sur la première ligne.

Soit $a_{11} \neq 0$. a_{11} est appelé ***pivot*** et sera noté par π_1.

Considérons la première ligne du système

$a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + a_{14}^{(1)} x_4 = b_1^{(1)}$

et on la résout par rapport à x_1.

« Le commencement est la moitié du tout » – I

On considére la première itération effectuée sur la première ligne.

Soit $a_{11} \neq 0$. a_{11} est appelé ***pivot*** et sera noté par π_1.

Considérons la première ligne du système

$a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + a_{14}^{(1)}x_4 = b_1^{(1)}$

et on la résout par rapport à x_1.On obtient

$$x_1 = -\frac{a_{12}^{(1)}}{\pi_1}x_2 - \frac{a_{13}^{(1)}}{\pi_1}x_3 - \frac{a_{14}^{(1)}}{\pi_1}x_4 + \frac{1}{\pi_1}b_1$$

« Le commencement est la moitié du tout » – I

On considére la première itération effectuée sur la première ligne.

Soit $a_{11} \neq 0$. a_{11} est appelé ***pivot*** et sera noté par π_1.

Considérons la première ligne du système

$$a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + a_{14}^{(1)} x_4 = b_1^{(1)}$$

et on la résout par rapport à x_1.On obtient

$$x_1 = -\frac{a_{12}^{(1)}}{\pi_1} x_2 - \frac{a_{13}^{(1)}}{\pi_1} x_3 - \frac{a_{14}^{(1)}}{\pi_1} x_4 + \frac{1}{\pi_1} b_1$$

Si on remplace x_1 aux autres équations, on a, par exemple pour la 2e équation

$$a_{21}^{(1)} \left(\frac{a_{12}^{(1)}}{\pi_1} x_2 - \frac{a_{13}^{(1)}}{\pi_1} x_3 - \frac{a_{14}^{(1)}}{\pi_1} x_4 + \frac{1}{\pi_1} b_1 \right) + a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + a_{24}^{(1)} x_4 = b_2^{(1)} \Rightarrow$$

« Le commencement est la moitié du tout » – I

On considére la première itération effectuée sur la première ligne.

Soit $a_{11} \neq 0$. a_{11} est appelé ***pivot*** et sera noté par π_1.

Considérons la première ligne du système

$a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + a_{14}^{(1)} x_4 = b_1^{(1)}$

et on la résout par rapport à x_1.On obtient

$$x_1 = -\frac{a_{12}^{(1)}}{\pi_1} x_2 - \frac{a_{13}^{(1)}}{\pi_1} x_3 - \frac{a_{14}^{(1)}}{\pi_1} x_4 + \frac{1}{\pi_1} b_1$$

Si on remplace x_1 aux autres équations, on a, par exemple pour la 2e équation

$$a_{21}^{(1)} \left(\frac{a_{12}^{(1)}}{\pi_1} x_2 - \frac{a_{13}^{(1)}}{\pi_1} x_3 - \frac{a_{14}^{(1)}}{\pi_1} x_4 + \frac{1}{\pi_1} b_1 \right) + a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + a_{24}^{(1)} x_4 = b_2^{(1)} \Rightarrow$$

$$0 x_1 + \left(a_{22}^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1} a_{12}^{(1)} \right) x_2 + \left(a_{23}^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1} a_{13}^{(1)} \right) x_3 + \left(a_{24}^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1} a_{14}^{(1)} \right) x_4 = b_2^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1} b_1^{(1)}$$

« Le commencement est la moitié du tout » – II

En faisant les mêmes calculs aux deux lignes suivantes, on obtient à la fin

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1} a_{12}^{(1)} & a_{23}^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1} a_{13}^{(1)} & a_{24}^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1} a_{14}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} - \frac{a_{31}^{(1)}}{\pi_1} a_{12}^{(1)} & a_{33}^{(1)} - \frac{a_{31}^{(1)}}{\pi_1} a_{13}^{(1)} & a_{34}^{(1)} - \frac{a_{31}^{(1)}}{\pi_1} a_{14}^{(1)} \\ 0 & a_{42}^{(1)} - \frac{a_{41}^{(1)}}{\pi_1} a_{12}^{(1)} & a_{43}^{(1)} - \frac{a_{41}^{(1)}}{\pi_1} a_{13}^{(1)} & a_{44}^{(1)} - \frac{a_{241}^{(1)}}{\pi_1} a_{14}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1} b_1^{(1)} \\ b_3^{(1)} - \frac{a_{31}^{(1)}}{\pi_1} b_1^{(1)} \\ b_4^{(1)} - \frac{a_{41}^{(1)}}{\pi_1} b_1^{(1)} \end{bmatrix}$$

« Le commencement est la moitié du tout » – III

On voit donc que cette façon de procéder élimine la variable x_1 *de* $4-1=3$ *dernières équations.* On obtient ainsi à la fin de la 1ère itération le système

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ 0 & a_{42}^{(3)} & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(2)} \\ b_4^{(2)} \end{bmatrix}$$

que l'on peut, encore, noté

$$\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(2)}$$

L'autre moitié – I

Nous allons maintenant éliminer la variable x_2 de $4-2 = 2$ dernières équations de $\mathbf{A}^{(2)}$:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(3)} & a_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ b_4^{(3)} \end{bmatrix}$$

L'autre moitié – I

Nous allons maintenant éliminer la variable x_2 de $4-2=2$ dernières équations de $\mathbf{A}^{(2)}$:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(3)} & a_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ b_4^{(3)} \end{bmatrix}$$

et la variable x_3 de $4-3=1$ dernière équation :

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ b_4^{(4)} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ *On peut résoudre le système par substitution inverse*

La troisième moitié : Décomposition $\mathbf{LU}$ – I

Une autre façon de voir le monde - et Gauss $\Longrightarrow$ ***Gauss en couleurs !***

La troisième moitié : Décomposition $\mathbf{LU}$ – I

Une autre façon de voir le monde - et Gauss $\Rightarrow$ *Gauss en couleurs !*

On pose

$$\mathbf{M}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{31}^{(1)}}{\pi_1} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_{41}^{(1)}}{\pi_1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

qui est une matrice triangulaire inférieure, avec sur la diagonale des 1.

La troisième moitié : Décomposition $\mathbf{LU}$ – II

Alors on a la relation

$$\begin{bmatrix} a^{(1)}_{11} & a^{(1)}_{12} & a^{(1)}_{13} & a^{(1)}_{14} \\ 0 & a^{(1)}_{22} - \frac{a^{(1)}_{21}}{\pi_1} a^{(1)}_{12} & a^{(1)}_{23} - \frac{a^{(1)}_{21}}{\pi_1} a^{(1)}_{13} & a^{(1)}_{24} - \frac{a^{(1)}_{21}}{\pi_1} a^{(1)}_{14} \\ 0 & a^{(1)}_{32} - \frac{a^{(1)}_{31}}{\pi_1} a^{(1)}_{12} & a^{(1)}_{33} - \frac{a^{(1)}_{31}}{\pi_1} a^{(1)}_{13} & a^{(1)}_{34} - \frac{a^{(1)}_{31}}{\pi_1} a^{(1)}_{14} \\ 0 & a^{(1)}_{42} - \frac{a^{(1)}_{41}}{\pi_1} a^{(1)}_{12} & a^{(1)}_{43} - \frac{a^{(1)}_{41}}{\pi_1} a^{(1)}_{13} & a^{(1)}_{44} - \frac{a^{(1)}_{241}}{\pi_1} a^{(1)}_{14} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a^{(1)}_{21}}{\pi_1} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a^{(1)}_{31}}{\pi_1} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a^{(1)}_{41}}{\pi_1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^{(1)}_{11} & a^{(1)}_{12} & a^{(1)}_{13} & a^{(1)}_{14} \\ a^{(1)}_{21} & a^{(1)}_{22} & a^{(1)}_{23} & a^{(1)}_{24} \\ a^{(1)}_{31} & a^{(1)}_{32} & a^{(1)}_{33} & a^{(1)}_{34} \\ a^{(1)}_{41} & a^{(1)}_{42} & a^{(1)}_{43} & a^{(1)}_{44} \end{bmatrix}$$

La troisième moitié : Décomposition $\mathbf{LU}$ – III

On a aussi la relation

$$\begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1} b_1^{(1)} \\ b_3^{(1)} - \frac{a_{31}^{(1)}}{\pi_1} b_1^{(1)} \\ b_4^{(1)} - \frac{a_{41}^{(1)}}{\pi_1} b_1^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{31}^{(1)}}{\pi_1} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_{41}^{(1)}}{\pi_1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ b_4^{(1)} \end{bmatrix}$$

La troisième moitié : Décomposition $\mathbf{LU}$ – III

On a aussi la relation

$$\begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} - \frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1} b_1^{(1)} \\ b_3^{(1)} - \frac{a_{31}^{(1)}}{\pi_1} b_1^{(1)} \\ b_4^{(1)} - \frac{a_{41}^{(1)}}{\pi_1} b_1^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{31}^{(1)}}{\pi_1} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_{41}^{(1)}}{\pi_1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ b_4^{(1)} \end{bmatrix}$$

Ces deux relations peuvent s'écrire

$$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A}^{(1)} \quad \text{et} \quad \mathbf{b}^{(2)} = \mathbf{M}^{(1)}\mathbf{b}^{(1)}$$

c'est-à-dire la première itération consiste à multiplier à gauche le système initial $\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *par* $\mathbf{M}^{(1)}$

La troisième moitié : Décomposition $\mathbf{LU}$ – IV

Continuons.

À la deuxième itération on aura

$$\mathbf{A}^{(3)} = \mathbf{M}^{(2)}\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A}^{(1)}$$
$$\mathbf{b}^{(3)} = \mathbf{M}^{(2)}\mathbf{b}^{(2)} = \mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{b}^{(1)}$$

La troisième moitié : Décomposition $\mathbf{LU}$ – IV

Continuons.
À la deuxième itération on aura

$$\mathbf{A}^{(3)} = \mathbf{M}^{(2)}\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A}^{(1)}$$
$$\mathbf{b}^{(3)} = \mathbf{M}^{(2)}\mathbf{b}^{(2)} = \mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{b}^{(1)}$$

et à la troisième et dernière

$$\mathbf{A}^{(4)} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{A}^{(3)} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A}^{(1)}$$
$$\mathbf{b}^{(4)} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{b}^{(3)} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{b}^{(2)} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{b}^{(1)}$$

La troisième moitié : Décomposition $\mathbf{LU}$ – IV

Continuons.
À la deuxième itération on aura

$$\mathbf{A}^{(3)} = \mathbf{M}^{(2)}\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A}^{(1)}$$
$$\mathbf{b}^{(3)} = \mathbf{M}^{(2)}\mathbf{b}^{(2)} = \mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{b}^{(1)}$$

et à la troisième et dernière

$$\mathbf{A}^{(4)} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{A}^{(3)} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A}^{(1)}$$
$$\mathbf{b}^{(4)} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{b}^{(3)} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{b}^{(2)} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{b}^{(1)}$$

Rappelons que *la matrice* $\mathbf{A}^{(4)}$ *est une matrice triangulaire supérieure*

La troisième moitié : Décomposition $\mathbf{LU}$ – IV

Continuons.
À la deuxième itération on aura

$$\mathbf{A}^{(3)} = \mathbf{M}^{(2)}\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A}^{(1)}$$
$$\mathbf{b}^{(3)} = \mathbf{M}^{(2)}\mathbf{b}^{(2)} = \mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{b}^{(1)}$$

et à la troisième et dernière

$$\mathbf{A}^{(4)} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{A}^{(3)} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A}^{(1)}$$
$$\mathbf{b}^{(4)} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{b}^{(3)} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{b}^{(2)} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{b}^{(1)}$$

Rappelons que *la matrice* $\mathbf{A}^{(4)}$ *est une matrice triangulaire supérieure et que la matrice* $\mathbf{M}^{(3)}$ *est aussi, par construction une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale.*

La troisième moitié : Décomposition $\mathbf{LU}$ – V

Récapitulons : nous avons

$$\mathbf{A}^{(4)} = \mathbf{M}\mathbf{A} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A}$$

$$\mathbf{b}^{(4)} = \mathbf{M}\mathbf{b} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{b}$$

La troisième moitié : Décomposition $\mathbf{LU}$ – V

Récapitulons : nous avons

$$\mathbf{A}^{(4)} = \mathbf{M}\mathbf{A} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A}$$
$$\mathbf{b}^{(4)} = \mathbf{M}\mathbf{b} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{b}$$

Donc

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^{(4)} = \left[\mathbf{M}^{(1)}\right]^{-1}\left[\mathbf{M}^{(2)}\right]^{-1}\left[\mathbf{M}^{(3)}\right]^{-1}\mathbf{A}^{(4)}$$
$$\mathbf{b} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}^{(4)} = \left[\mathbf{M}^{(1)}\right]^{-1}\left[\mathbf{M}^{(2)}\right]^{-1}\left[\mathbf{M}^{(3)}\right]^{-1}\mathbf{b}^{(4)}$$

La troisième moitié : Décomposition $\mathbf{LU}$ – V

Récapitulons : nous avons

$$\mathbf{A}^{(4)} = \mathbf{M}\mathbf{A} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A}$$
$$\mathbf{b}^{(4)} = \mathbf{M}\mathbf{b} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{b}$$

Donc

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^{(4)} = \left[\mathbf{M}^{(1)}\right]^{-1}\left[\mathbf{M}^{(2)}\right]^{-1}\left[\mathbf{M}^{(3)}\right]^{-1}\mathbf{A}^{(4)}$$
$$\mathbf{b} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}^{(4)} = \left[\mathbf{M}^{(1)}\right]^{-1}\left[\mathbf{M}^{(2)}\right]^{-1}\left[\mathbf{M}^{(3)}\right]^{-1}\mathbf{b}^{(4)}$$

Nous avons

$$\mathbf{M}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{31}^{(1)}}{\pi_1} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_{41}^{(1)}}{\pi_1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La troisième moitié : Décomposition $\mathbf{LU}$ – V

Récapitulons : nous avons

$$\mathbf{A}^{(4)} = \mathbf{MA} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A}$$
$$\mathbf{b}^{(4)} = \mathbf{Mb} = \mathbf{M}^{(3)}\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{b}$$

Donc

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^{(4)} = \left[\mathbf{M}^{(1)}\right]^{-1}\left[\mathbf{M}^{(2)}\right]^{-1}\left[\mathbf{M}^{(3)}\right]^{-1}\mathbf{A}^{(4)}$$
$$\mathbf{b} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}^{(4)} = \left[\mathbf{M}^{(1)}\right]^{-1}\left[\mathbf{M}^{(2)}\right]^{-1}\left[\mathbf{M}^{(3)}\right]^{-1}\mathbf{b}^{(4)}$$

Nous avons

$$\mathbf{M}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{31}^{(1)}}{\pi_1} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_{41}^{(1)}}{\pi_1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{L}^{(1)} = \left[\mathbf{M}^{(1)}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}^{(1)}}{\pi_1} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{31}^{(1)}}{\pi_1} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{a_{41}^{(1)}}{\pi_1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La troisième moitié : Décomposition $\mathbf{LU}$ – VI

Nous avons donc

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{L}^{(3)}\mathbf{A}^{(4)} = \mathbf{LU},\\ \mathbf{b} &= \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{L}^{(3)}\mathbf{b}^{(4)} = \mathbf{L}\mathbf{b}^{(4)}\end{aligned}$$

La troisième moitié : Décomposition $\mathbf{LU}$ – VI

Nous avons donc

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{L}^{(3)}\mathbf{A}^{(4)} = \mathbf{LU},$$
$$\mathbf{b} = \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{L}^{(3)}\mathbf{b}^{(4)} = \mathbf{Lb}^{(4)}$$

avec

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{L}^{(3)}$$

La troisième moitié : Décomposition $\mathbf{LU}$ – VI

Nous avons donc

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{L}^{(3)}\mathbf{A}^{(4)} = \mathbf{L}\mathbf{U},$$
$$\mathbf{b} = \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{L}^{(3)}\mathbf{b}^{(4)} = \mathbf{L}\mathbf{b}^{(4)}$$

avec

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{L}^{(3)} \quad \text{et} \quad \mathbf{U} = \mathbf{A}^{(4)}$$

La troisième moitié : Décomposition $\mathbf{LU}$ – VI

Nous avons donc

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{L}^{(3)}\mathbf{A}^{(4)} = \mathbf{LU},$$
$$\mathbf{b} = \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{L}^{(3)}\mathbf{b}^{(4)} = \mathbf{Lb}^{(4)}$$

avec

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{L}^{(3)} \quad \text{et} \quad \mathbf{U} = \mathbf{A}^{(4)}$$

Cette relation est *la décomposition* $\mathbf{LU}$ *de la matrice* $\mathbf{A}$, où $\mathbf{L}$ est une matrice triangulaire inférieure, avec des 1 sur la diagonale

La troisième moitié : Décomposition $\mathbf{LU}$ – VI

Nous avons donc

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{L}^{(3)}\mathbf{A}^{(4)} = \mathbf{LU},$$
$$\mathbf{b} = \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{L}^{(3)}\mathbf{b}^{(4)} = \mathbf{Lb}^{(4)}$$

avec

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{L}^{(3)} \quad \text{et} \quad \mathbf{U} = \mathbf{A}^{(4)}$$

Cette relation est *la décomposition* $\mathbf{LU}$ *de la matrice* $\mathbf{A}$, où $\mathbf{L}$ est une matrice triangulaire inférieure, avec des 1 sur la diagonale et $\mathbf{U}$ est une matrice triangulaire supérieure.

La quatrième et dernière moitié :

Soit le système linéaire $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

La quatrième et dernière moitié :

Soit le système linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$
En tenant compte de la décomposition $\mathbf{LU}$ on peut écrire

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{LUx}$$

La quatrième et dernière moitié :

Soit le système linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

En tenant compte de la décomposition $\mathbf{LU}$ on peut écrire

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{LUx}$$

En posant $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ on obtient

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{Ly} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Ly} = \mathbf{b}$$

La quatrième et dernière moitié :

Soit le système linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

En tenant compte de la décomposition $\mathbf{LU}$ on peut écrire

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{LUx}$$

En posant $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ on obtient

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{Ly} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Ly} = \mathbf{b}$$

ce qui permet de calculer $\mathbf{y}$ comme suit

$$\mathbf{y} = \mathbf{Mb}$$

La quatrième et dernière moitié :

Soit le système linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$
En tenant compte de la décomposition $\mathbf{LU}$ on peut écrire

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{LUx}$$

En posant $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ on obtient

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{Ly} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Ly} = \mathbf{b}$$

ce qui permet de calculer $\mathbf{y}$ comme suit

$$\mathbf{y} = \mathbf{Mb}$$

et la solution du système est obtenue par substitution inverse du système

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$$

Complexité

En termes de complexité l'élimination de Gauss et la décomposition $\mathbf{LU}$ sont de l'ordre de $O\left(n^3\right)$.

Complexité

En termes de complexité l'élimination de Gauss et la décomposition $\mathbf{LU}$ sont de l'ordre de $O\left(n^3\right)$.

La décomposition $\mathbf{LU}$ est particulièrement utile quand on veut inverser une matrice.

Complexité

En termes de complexité l'élimination de Gauss et la décomposition $\mathbf{LU}$ sont de l'ordre de $O\left(n^3\right)$.

La décomposition $\mathbf{LU}$ est particulièrement utile quand on veut inverser une matrice.

Dans ce cas on a $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ et la décomposition $\mathbf{LU}$ donne un premier calcul $\mathbf{LY} = \mathbf{I}$, d'où $\mathbf{Y} = \mathbf{L}^{-1}$ et ensuite on obtient la matrice inverse par la résolution de $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$.

Complexité

En termes de complexité l'élimination de Gauss et la décomposition $\mathbf{LU}$ sont de l'ordre de $O\left(n^3\right)$.

La décomposition $\mathbf{LU}$ est particulièrement utile quand on veut inverser une matrice.

Dans ce cas on a $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ et la décomposition $\mathbf{LU}$ donne un premier calcul $\mathbf{LY} = \mathbf{I}$, d'où $\mathbf{Y} = \mathbf{L}^{-1}$ et ensuite on obtient la matrice inverse par la résolution de $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$.

Donc cette méthode permet d'inverser une matrice avec un nombre d'opérations de l'ordre de $O\left(n^3\right)$.

Factorisation de Cholesky

Soit $\mathbf{A}$ symétrique.

De la décomposition $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ nous pouvons obtenir la décomposition $\mathbf{A} = \mathbf{LDU}'$ où $\mathbf{L}$ matrice comme précedement, $\mathbf{U}'$ matrice triangulaire supérieure avec éléments diagonaux égaux à 1 et $\mathbf{D} = \mathrm{diag}\left(u_{11}, \ldots u_{nn}\right)$ matrice diagonale.

Factorisation de Cholesky

Soit $\mathbf{A}$ symétrique.

De la décomposition $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ nous pouvons obtenir la décomposition $\mathbf{A} = \mathbf{LDU}'$ où $\mathbf{L}$ matrice comme précedement, $\mathbf{U}'$ matrice triangulaire supérieure avec éléments diagonaux égaux à 1 et $\mathbf{D} = \operatorname{diag}\left(u_{11}, \ldots u_{nn}\right)$ matrice diagonale.
Il est facile de voir que $\mathbf{U}' = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}$ où la matrice $\mathbf{D}^{-1}$ existe car la matrice $\mathbf{U}$ est régulière.

Factorisation de Cholesky

Soit $\mathbf{A}$ symétrique.

De la décomposition $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ nous pouvons obtenir la décomposition $\mathbf{A} = \mathbf{LDU}'$ où $\mathbf{L}$ matrice comme précedement, $\mathbf{U}'$ matrice triangulaire supérieure avec éléments diagonaux égaux à 1 et $\mathbf{D} = \mathrm{diag}\,(u_{11}, \ldots u_{nn})$ matrice diagonale.
Il est facile de voir que $\mathbf{U}' = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}$ où la matrice $\mathbf{D}^{-1}$ existe car la matrice $\mathbf{U}$ est régulière.
Si $\mathbf{A}$ symétrique, alors
$\mathbf{A} = \mathbf{LDU}' = \mathbf{LDL}^\top$

Factorisation de Cholesky

Soit $\mathbf{A}$ symétrique.

De la décomposition $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ nous pouvons obtenir la décomposition $\mathbf{A} = \mathbf{LDU}'$ où $\mathbf{L}$ matrice comme précedement, $\mathbf{U}'$ matrice triangulaire supérieure avec éléments diagonaux égaux à 1 et $\mathbf{D} = \mathrm{diag}\,(u_{11}, \ldots u_{nn})$ matrice diagonale.
Il est facile de voir que $\mathbf{U}' = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}$ où la matrice $\mathbf{D}^{-1}$ existe car la matrice $\mathbf{U}$ est régulière.
Si $\mathbf{A}$ symétrique, alors
$\mathbf{A} = \mathbf{LDU}' = \mathbf{LDL}^\top$
Si, de plus, $\mathbf{A}$ définie positive, c'est-à-dire $\mathbf{x}^\top\mathbf{A}\mathbf{x} > \mathbf{0}$, alors
$\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^\top = \mathbf{L}\sqrt{\mathbf{D}}\sqrt{\mathbf{D}}\mathbf{L}^\top = \mathbf{CC}^\top$
avec $\mathbf{C} = \mathbf{L}\sqrt{\mathbf{D}}$ et où on a noté $\sqrt{\mathbf{D}} = \mathrm{diag}\left(\sqrt{d_{11}}, \ldots, \sqrt{d_{nn}}\right)$.

Factorisation de Cholesky

Soit $\mathbf{A}$ symétrique.

De la décomposition $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ nous pouvons obtenir la décomposition $\mathbf{A} = \mathbf{LDU}'$ où $\mathbf{L}$ matrice comme précedement, $\mathbf{U}'$ matrice triangulaire supérieure avec éléments diagonaux égaux à 1 et $\mathbf{D} = \mathrm{diag}\left(u_{11}, \ldots u_{nn}\right)$ matrice diagonale.
Il est facile de voir que $\mathbf{U}' = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}$ où la matrice $\mathbf{D}^{-1}$ existe car la matrice $\mathbf{U}$ est régulière.
Si $\mathbf{A}$ symétrique, alors
$\mathbf{A} = \mathbf{LDU}' = \mathbf{LDL}^\top$
Si, de plus, $\mathbf{A}$ définie positive, c'est-à-dire $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} > \mathbf{0}$, alors
$\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^\top = \mathbf{L}\sqrt{\mathbf{D}}\sqrt{\mathbf{D}}\mathbf{L}^\top = \mathbf{CC}^\top$
avec $\mathbf{C} = \mathbf{L}\sqrt{\mathbf{D}}$ et où on a noté $\sqrt{\mathbf{D}} = \mathrm{diag}\left(\sqrt{d_{11}}, \ldots, \sqrt{d_{nn}}\right)$.
Cette décomposition est la ***factorisation de Cholesky***.