

Analyse Numérique

Analyse des erreurs, Suite

Laurence Lamoulié

EISTI

Ecole Internationale des Sciences du Traitement de
l'Information



Erreurs de calcul



Fait 1.5: Pour une opération quelconque

Soient a et b deux réels, le résultat de $a \otimes b$ est en fait :

$$m(a \otimes b) = m(m(a) \otimes m(b))$$

où l'erreur $m(a \otimes b) - a \otimes b$ se décompose en :

- erreur d'entrée $\eta^l(a \otimes b)$ dûe à l'erreur de représentation du résultat de l'opération
- erreur de calcul $\eta^c(a \otimes b)$ dûe au calcul lui-même, inhérente à la machine

L'erreur d'entrée $\eta^l(a \otimes b)$ dépend de l'ordre des opérations donc on peut la minimiser.

Discussion pour la somme



Soient a et b deux réels dont on calcule la somme $S = a + b$.

On a :

$$S = a + b \Rightarrow \Delta' S = \Delta' a + \Delta' b$$

Or $\eta(x) = \frac{\Delta(x)}{x}$ donc

$$\eta'(S) = \frac{\Delta' S}{S} = \frac{\Delta' a}{S} + \frac{\Delta' b}{S}$$

et $\Delta(x) = \eta(x) * x$ donc

$$\Rightarrow \eta'(S) = \frac{a}{S} \eta' a + \frac{b}{S} \eta' b$$

Théorèmes pour la somme



Pour la somme de 2 réels

Théorème: Soient a et b deux réels, la somme $S = a + b$ est entachée :

- d'une erreur absolue d'entrée :

$$\Delta' S = \Delta' a + \Delta' b$$

- donc d'une erreur relative d'entrée ou erreur de précision d'entrée

$$\eta'(S) = \frac{a}{S}\eta'(a) + \frac{b}{S}\eta'(b)$$

Théorèmes pour la somme



Généralisation pour la somme de n réels

Théorème 1.6.1: Généralisation

Soient x_1, x_2, \dots, x_n n réels, la somme $S = \sum_{i=1}^n x_i$ est entachée :

- d'une erreur absolue d'entrée :

$$\Delta^l S = \sum_{i=1}^n \Delta^l x_i \quad (1.6.3)$$

- donc d'une erreur relative d'entrée ou erreur de précision d'entrée

$$\eta^l(S) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{S} \eta^l(x_i) \quad (1.6.4)$$

Majoration d'erreur pour la somme



En reprenant la somme de deux réels, on peut majorer dans $\eta'(S) = \frac{a}{S}\eta'a + \frac{b}{S}\eta'b$ en prenant la valeur absolue :

$$|\eta'(S)| \leq \frac{|a|}{|S|} |\eta'a| + \frac{|b|}{|S|} |\eta'b|$$

donc, sachant que $|\eta'x| \leq \varepsilon$

$$|\eta'(S)| \leq \frac{|a|}{|S|}\varepsilon + \frac{|b|}{|S|}\varepsilon = \frac{|a| + |b|}{|S|}\varepsilon$$

Cette majoration se généralise :

$$|\eta'(S)| \leq \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{|\sum_{i=1}^n x_i|} \varepsilon \quad (1.6.5)$$

Discussion pour le produit



Soient a et b deux réels dont on calcule le produit $P = a * b$.

On a :

$$P = a * b \Rightarrow P + \Delta' P = m(a) + m(b) = (a + \Delta' a) * (b + \Delta' b)$$

Soit, en négligeant les termes d'ordre 2 :

$$P + \Delta' P = ab + \Delta' a . b + \Delta' b . a$$

comme $P = ab$ on a

$$\begin{aligned}\Delta' P &= \frac{\Delta' a}{a} . ab + \frac{\Delta' b}{b} . ab \\ \Rightarrow \frac{\Delta' P}{P} &= \frac{\Delta' a}{a} + \frac{\Delta' b}{b} \\ \Rightarrow \left| \frac{\Delta' P}{P} \right| &\leq \left| \frac{\Delta' a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta' b}{b} \right| \leq 2\varepsilon\end{aligned}$$

Théorèmes pour le produit



Pour le produit de 2 réels

Théorème: Soient a et b deux réels non nuls, le produit $P = a * b$ est entaché:

- d'une erreur absolue d'entrée:

$$\Delta^l P = P. \left(\frac{\Delta^l a}{a} + \frac{\Delta^l b}{b} \right)$$

- donc d'une erreur relative d'entrée ou erreur de précision d'entrée

$$\eta^l(P) = \eta^l(a) + \eta^l(b)$$

Théorèmes pour le produit



Généralisation pour le produit de n réels

Théorème 1.6.2: Généralisation

Soient x_1, x_2, \dots, x_n n réels non nuls, le produit $P = \prod_{i=1}^n x_i$ est entaché:

- d'une erreur absolue d'entrée :

$$\Delta^l P = P \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{\Delta^l x_i}{x_i} \right)$$

- donc d'une erreur relative d'entrée ou erreur de précision d'entrée

$$\eta^l(P) = \sum_{i=1}^n \eta^l(x_i)$$

Discussion pour la division



Soient a et b deux réels dont on calcule le quotient $Q = a/b$.
On a :

$$Q = \frac{a}{b} \Rightarrow Q + \Delta' Q = \frac{m(a)}{m(b)} = \frac{a + \Delta' a}{b + \Delta' b}$$

$$\Rightarrow (Q + \Delta' Q) (b + \Delta' b) = (a + \Delta' a)$$

Soit, en négligeant les termes d'ordre 2 :

$$Q\Delta' b + b\Delta' Q = \Delta' a$$

$$\Rightarrow \Delta' Q = \frac{b\Delta' a - a\Delta' b}{b^2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\Delta' Q}{Q} \right| = |\eta'(Q)| \leq 2\varepsilon$$

Théorème pour la division



Pour la division de 2 réels

Théorème 1.6.3: Soient a et b deux réels, b non nul, le produit $Q = a/b$ est entaché :

- d'une erreur absolue d'entrée :

$$\Delta'Q = \frac{b\Delta'a - a\Delta'b}{b^2} \quad (1.6.9)$$

- donc d'une erreur relative d'entrée ou erreur de précision d'entrée

$$\eta'(P) = \eta'(a) - \eta'(b) \quad (1.6.10)$$

Formalisation de la notion d'algorithme



Un algorithme?

Définition : C'est une transformation ϕ qui fait passer d'un ensemble de données $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ à un résultat final $Y = [y_1, y_2, \dots, y_m] = \phi(X)$.

On décompose ϕ en une suite de transformations élémentaires $\phi^{(k)}$, $k = 1 \dots r$:

$$\phi = \phi^{(r)} \circ \dots \circ \phi^{(2)} \circ \phi^{(1)}$$

Si en entrée on donne $m(X)$ au lieu de X , alors à la sortie on a $m(Y) = m(\phi(m(X)))$. L'erreur $\Delta(Y)$ s'exprime pour chaque composante $y_i = \phi_i(X)$ de Y :

$$\Delta y_i \approx \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_i(X)}{\partial x_j} \Delta x_j \quad i = 1, \dots, m$$

Formalisation de la notion d'algorithme



Ecriture sous forme matricielle

$$\Delta y_i \approx \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_i(X)}{\partial x_j} \Delta x_j \quad i = 1, \dots, m \quad (1.7.1)$$

donne

$$\begin{aligned} \Delta Y = \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \vdots \\ \Delta y_m \end{bmatrix} &\approx \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} \\ &= J[\phi(X)] \Delta X \end{aligned} \quad (1.7.2)$$

où $J[\phi(X)]$ est la jacobien de ϕ

Erreur relative dans un algorithme



De (1.7.1) on déduit que

$$\frac{\Delta y_i}{y_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_i(X)}{\partial x_j} \frac{\Delta x_j}{x_j} \frac{x_j}{y_i}$$

donc

$$\eta(y_i) = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{y_i} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \eta(x_j)$$

soit

$$\eta(y_i) = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{\phi_i(X)} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \eta(x_j) \quad (1.7.3)$$

Les facteurs $\frac{x_j}{\phi_i(X)} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}$ sont appelés **facteurs de conditionnement** de l'algorithme

Exemple : Calcul de $a - b^2$ 

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} \xrightarrow{\phi^{(1)}} x^{(1)} = \begin{pmatrix} a \\ b^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\phi^{(2)}} x^{(2)} = a - b^2 = Y$$

L'algorithme compte 2 étapes donc $r = 2$. Si on note $\Psi^{(k)}$ l'application qui reste à faire après k étapes, on a ici seulement $\Psi^{(1)}$:

$$\Psi^{(1)} = \phi^{(2)} = \text{reste à faire après } \phi^{(1)}$$

soit

$$\Psi^{(1)} = \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} = a - \alpha$$

Exemple : Calcul de $a - b^2$



On décompose ϕ sous la forme

$$\phi = \phi^{(2)} \circ \phi^{(1)}$$

soit ici

$$\phi = \Psi^{(1)} \circ \phi^{(1)}$$

mais en général on a

$$\phi = \Psi^{(k)} \circ \phi^{(k)} \circ \phi^{(k-1)} \dots \circ \phi^{(1)}$$

où

$$\Psi^{(k)} = \phi^{(r)} \circ \phi^{(r-1)} \dots \circ \phi^{(k+1)}$$

Exemple : Calcul de $a - b^2$ 

On veut $\Delta x^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
 \Delta x^{(2)} &= m(x^{(2)}) - x^{(2)} \\
 &= m(\phi^{(2)}(m(x^{(1)}))) - \phi^{(2)}(x^{(1)}) \\
 &= \underbrace{m(\phi^{(2)}(m(x^{(1)}))) - \phi^{(2)}(m(x^{(1)}))}_{\alpha} \\
 &\quad + \underbrace{\phi^{(2)}(m(x^{(1)})) - \phi^{(2)}(x^{(1)})}_{\beta}
 \end{aligned}$$

On développe chaque terme séparément

Exemple : Calcul de $a - b^2$ 

Pour β :

$$\beta \approx J\phi^{(2)}(x^{(1)}) \cdot (m(x^{(1)}) - x^{(1)})$$

(analogue à $f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h$) soit

$$\beta \approx J\phi^{(2)}(x^{(1)}) \cdot \Delta(x^{(1)})$$

Pour α

$$m[\phi^{(2)}(m(x^{(1)}))] = \phi^{(2)}(m(x^{(1)})) (1 + \eta^2(m(x^{(1)})))$$

car $m(X) = X + m(X) - X = X(1 + \frac{m(X)-X}{X})$ et

$$\eta = \frac{\Delta X}{X} = \frac{m(X)-X}{X}$$

Exemple : Calcul de $a - b^2$ 

Pour α

$$\begin{aligned}
 & \phi^{(2)}(m(x^{(1)})) (1 + \eta^2(m(x^{(1)}))) - \phi^{(2)}(m(x^{(1)})) \\
 = & \eta^2(m(x^{(1)})) \cdot \phi^{(2)}(m(x^{(1)})) \\
 \approx & \eta^2(m(x^{(1)})) \cdot \phi^{(2)}(x^{(1)}) \\
 = & \eta^2(m(x^{(1)})) \cdot x^{(2)}
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 \Delta x^{(2)} &= \eta^{(2)}(m(x^{(1)})) \cdot x^{(2)} + J\phi^{(2)}(x^{(1)}) \cdot \Delta(x^{(1)}) \\
 &\approx \eta(a - B) \cdot x^{(2)} + J\Psi^{(1)}(x^{(1)}) \cdot \Delta(x^{(1)})
 \end{aligned}$$

où $H_r y = \eta(a - B) \cdot x^{(2)}$

Sur $\Delta(x^{(1)})$ on renouvelle le même raisonnement

Exemple : Calcul de $a - b^2$ 

Pour $\Delta(x^{(1)})$:

$$\begin{aligned}
 \Delta x^{(1)} &= \eta^{(1)}(m(x^{(0)})).x^{(1)} + J\phi^{(1)}(x^{(0)}).\Delta(x^{(0)}) \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta(b^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1^{(1)}}{\partial a} & \frac{\partial\phi_1^{(1)}}{\partial b} \\ \frac{\partial\phi_2^{(1)}}{\partial a} & \frac{\partial\phi_2^{(1)}}{\partial b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \eta(b^2).b^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \eta(b^2).b^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta a \\ 2b\Delta b \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \Delta a \\ \eta(b^2).b^2 + 2b\Delta b \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Exemple : Calcul de $a - b^2$ 

Finalement :

$$\begin{aligned}
 \Delta x^{(2)} &= \eta(a - B).(a - b^2) + J\Psi^{(1)}(x^{(1)}) \cdot \begin{pmatrix} \Delta a \\ \eta(b^2).b^2 + 2b\Delta b \end{pmatrix} \\
 &= \eta(a - B).(a - b^2) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta a \\ \eta(b^2).b^2 + 2b\Delta b \end{pmatrix} \\
 &= \underbrace{\eta(a - b^2).(a - b^2) - \eta(b^2).b^2}_{\text{propagation des erreurs sur les op. faites en cours d'algo.}} \\
 &+ \underbrace{\Delta a - 2b\Delta b}_{\text{erreur sur la donnée}}
 \end{aligned}$$

Références

