I

* $m(x)$ est la représentation machine de x.
  - ↳ $\Delta x = m(x) - x$: erreur représentation.
  - ↳ $\eta(x) = \dfrac{\Delta x}{x}$: erreur relative de précision.

$\boxed{m(x) = x(1+\eta)}$

* des erreurs de calcul.

* $a \otimes b = m(m(a) \otimes m(b))$
* η^I : erreur d'entrée
* η^c : erreur de calcul

  - $\eta^I(a+b) = \dfrac{a}{a+b}\eta^I(a) + \dfrac{b}{a+b}\eta^I(b)$
  - $\eta^I(a * b) = \eta^I(a) + \eta^I(b)$
  - $\eta^I\left(\dfrac{a}{b}\right) = \eta^I(a) - \eta^I(b)$
  - $\eta^I(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\eta^I(a)$

* nbre condition d'une fonction : $K(x) = \left|\dfrac{f'(x)}{f(x)} \cdot x\right|$

* erreur d'opération

$$\Delta Y = \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \vdots \\ \Delta y_p \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_p}{\partial x_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_m \end{bmatrix} = J[\phi(x)] \cdot \Delta x$$

$\boxed{|\eta(x)| < eps}$

* erreur relative d'opération

$$\eta(y) = \begin{bmatrix} \eta(y_1) \\ \vdots \\ \eta(y_p) \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} K(\phi_1, x_1) & \cdots & K(\phi_1, x_m) \\ \vdots & & \vdots \\ K(\phi_p, x_1) & \cdots & K(\phi_p, x_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(x_1) \\ \vdots \\ \eta(x_m) \end{bmatrix} = K(\phi, x) \cdot \eta(x)$$

* Propagation d'une erreur : $\Delta x^{(k+1)} = J(\phi^{(k+1)}(x^{(k)})) \cdot \Delta x^{(k)} + H_{k+1} \cdot x^{(k+1)}$

* Erreur d'un algo

$$\Delta y = J(\phi(x)) \cdot \Delta x + \sum_{k=1}^{r-1} \left(J(\psi^{(k)}(x^{(k)})) \cdot H_k x^{(k)} \right) + H_r y$$

II Factorisation de Gauss (Factorisation LU)

$A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le m} = A^{(1)}$

* $M^{(k)} = (b_{ij}) \begin{cases} b_{\ell,k} = -\dfrac{a^{(k)}_{\ell,k}}{a_{kk}} & \text{pour } \ell > k \\ b_{\ell,\ell} = 1 & \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$

* $L^{(k)} = [M^{(k)}]^{-1} = 2I_m - M^{(k)}$

* $A^{(k+1)} = M^{(k)} A^{(k)}$

Après $m-1$ itérations :

$A = LU$ avec

* $L = L^{(1)} \times \cdots \times L^{(m-1)}$
* $U = A^{(m)}$

Amélioration => Pivotage partiel : à chaque étape $\pi = \max\limits_{\ell \ge k} (|a^{(k)}_{\ell\ell}|)$

* Factorisation de Cholesky ($A = LL^*$)

$L(1,1) \leftarrow \sqrt{A(1,1)}$
Pour $i \leftarrow 2$ à n
    Pour $j \leftarrow 1$ à $i-1$
        $L(i,j) \leftarrow \dfrac{1}{L(j,j)} \left(A(i,j) - \sum_{k=1}^{j-1} L(i,k) * L(j,k) \right)$
    FinPour
    $L(i,i) \leftarrow \left[A(i,i) - \sum_{k=1}^{i-1} (L(i,k))^2 \right]^{1/2}$
FinPour

* Conditionnement d'une matrice : $K(A) = \|A\| . \|A^{-1}\|$

* Norme d'une matrice : $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$

$\hookrightarrow \quad \rho(A) \leq \|A\|$

$\hookrightarrow \quad \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$

norme consistante ($\|.\|_2$) $\Rightarrow \quad \|Ax\| \leq \|A\| . \|x\|$.

* Méthodes Itératives

Méthode	Décomposition $\boxed{M - N}$	$M^{-1}N$	Itération
Jacobi	$A = D - (L+U)$	$J = D^{-1}(L+U)$	$D x^{(k+1)} = -(L+U) x^{(k)} + b$.
Gauss-Siedel	$A = (D+L) - U$	$G = (D+L)^{-1} U$	$(D+L) x^{(k+1)} = U x^{(k)} + b$
Jacobi relaxée	$A = D - (L+U)$	$J = -D^{-1}(L+U)$	$x^{(k+1)} = (1-\omega) x^{(k)} - \omega D^{-1} (L+U) x^{(k)} + \omega D^{-1} b$
Gauss Siedel relaxée	$A = (D+L) - U$	$G = (D+L)^{-1} U$	$x^{(k+1)} = (1-\omega)(I + \omega D^{-1} L)^{-1} x^{(k)} - \omega (I + \omega D^{-1} L)^{-1} D^{-1} U x^{(k)} + \omega (D + \omega L)^{-1} D^{-1} b$.

avec $A = \begin{bmatrix} \ddots & & U \\ & D & \\ L & & \ddots \end{bmatrix}$

nb itérations : $\dfrac{\log(\varepsilon)}{\log(\rho(B))} = k_{min}$

avec $B = M^{-1} N$

Test d'arrêt

1) $\|e^{(k+1)}\| \leq \dfrac{\|B\|^{k+1}}{1 - \|B\|} . \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$

2) $\dfrac{\|M^{-1} r^{(k)}\|}{\|M^{-1} r^{(0)}\|} \leq \varepsilon$

avec $r^{(k)} = b - A x^{(k)}$

$\nabla J = \left[\frac{\partial J}{\partial x_1}, \frac{\partial J}{\partial x_2} \dots \frac{\partial J}{\partial x_n} \right]$

$HJ = \nabla^T J . \nabla J$

$= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 J}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$

* Résolution d'un système linéaire par minimisation de la fonctionnelle.

$$* \quad J(x) = \frac{1}{2} \left(x^T A x \right) - x^T b.$$

$$* \quad \nabla J(x) = \frac{1}{2} \left(A^T + A \right) x - x^T A = Ax - b.$$

$$\Rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} J(x) \rightarrow \nabla J(x^*) = 0 \rightarrow Ax^* = b$$

* Méthodes de descentes

↳ un vecteur d est une direction de descente pour une fonctionnelle J au pt x si $\forall \gamma$, $\exists\, h \in [0; \gamma] \,/\, J(x + hd) \leq J(x)$.

L'idée est de construire un algo. à partir d'un point $x^{(0)}$ tq $\nabla J(x^{(0)}) \neq 0$, et de construire $x^{(1)}$ en utilisant une direction de descente depuis $x^{(0)}$.

1°) Direction :

⤳ Cauchy : $d = -\nabla J(x)$

⤳ Newton : $d = -H^{-1}(J(x)) \nabla J(x)$

avec H définie, positive.

2°) Pas :

⤳ Pas fixe : h est cst

⤳ Pas optimal : h choisi tq $J(x^{(0)} + hd)$ soit optimal.

3°) Condition d'arrêt

$$\| \nabla J(x^{(k+1)}) \| \leq \varepsilon_{seuil}.$$

↳ $\varepsilon_{seuil} = 10^{-6} * \| \nabla J(x^{(0)}) \|$

$\boxed{\text{Exemples d'itérations}}$

1°) Pas fixe : $d_k = -\nabla J(x^{(k)})^T$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h d_k$$

2°) Pas optimal : $d_k = -\nabla J(x^{(k)})^T$

$$h_k = \arg\left[\min_{h>0} J(x^{(k)} - h\nabla J(x^{(k)})^T)\right]$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h_k d_k$$

* Algo du gradient conjugué

- Initialisation : $x^{(0)}$ donné
  $r_0 = Ax^{(0)} - b$
  $d_0 = r_0$

- $k^{\text{ème}}$ itération : $\rightarrow h_k = \dfrac{d_{k-1}^T r_{k-1}}{d_{k-1}^T A d_{k-1}}$

$$\rightarrow x^{(k)} = x^{(k-1)} + h_k d_{k-1}$$

$$\rightarrow r_k = r_{k-1} - h_k A d_{k-1}$$

$$\rightarrow d_k = r_k - \frac{(A d_{k-1})^T r_k}{(A d_{k-1})^T d_{k-1}}$$