Chapitre III

Valeurs et Vecteurs Propres

I - Valeurs et vecteurs propres.
II - Décomposition en valeurs singulières
III - Pseudoinverse et moindres carrés

(I) Ptés des valeurs/vecteurs propres : λ valeur propre et u vecteur associé

1) λ^k valeur propre de A^k, et u vecteur propre.
2) $\frac{1}{\lambda}$ valeur propre de A^{-1}, et u vecteur propre.
3) $(\lambda + r)$ valeur propre de $(A + r I_n)$.
4) $c\lambda$ valeur propre de cA, et u vecteur propre.
5) $Tr(A) = \sum_1^n \lambda_i$
6) u vecteur propre alors $\frac{u}{\|u\|}$ l'est aussi.
7) B matrice régulière, λ valeur propre de $B^{-1}AB$.
8) A sym. définie positive $\Rightarrow \lambda_i > 0$.
9) B orthogonale / unitaire, λ valeur propre de $B^T A B$.
10) A triangulaire $\Rightarrow \{\lambda_i\} = \{a_{ii}\}$.
11) $\sigma(A) = \{\lambda_i\}$; $A(\lambda) = \{u \in \mathbb{R}^n / u \neq 0, Au = \lambda u\}$; $S(\lambda) = n - rg(A - \lambda I)$; $P_A = \det(A - \lambda I)$ le polynôme caractéristique de A dt les solut° st les valeurs propres.

* Soit λ valeur propre de A et u vecteur propre associé.

$$Au = \lambda u.$$

Soit U inversible telle que $Uv = u$ $(v = U^{-1}u)$

$$\Rightarrow AUv = \lambda Uv$$

$$\Rightarrow (U^{-1}AU)v = \lambda v, \quad v \neq 0.$$

On note $B = U^{-1}AU$ qui a les m̂ vecteurs propres que A. A et B sont dits semblables : $A \sim B$

* Deux matrices semblables ont m̂ polynôme caractéristique, m̂ déterminant et m̂ valeurs propres. Si u est vecteur propre associé à λ, pour A, $U^{-1}u$ est un vecteur propre pour B

* A est diagonalisable s'il existe n vecteurs linéairement indépendants qui sont des vecteurs propres de A.

* A a toutes ses valeurs propres distinctes $\Rightarrow$ diagonalisable.

$$A = U \Lambda U^{-1} ; \quad \Lambda = U^{-1}AU$$

* Conditionnement d'une matrice :

$$K(A) = \|A^{-1}\| . \|A\|$$

* Toute matrice est diagonalisable ; Soit $A \in \mathbb{R}_n$, $\exists\ U \in \mathbb{C}_n$ tq : $T = U^*AU$ avec T triangulaire.

* Pour calculer les vecteurs propres + valeurs propres on peut appliquer l'algorithme de factorisation LU ; A chaque étape on fait la décomposition LU de la matrice $A_k = L_k U_k$ et $A_{k+1} = U_k L_k$ ....

* Pour localiser les valeurs propres, on utilise les disques de Gersgorim :

$$D_i^{(l)} = \left\{ z \in \mathbb{C} / |z - a_{ii}| \leq \sum_{l \neq j} |a_{ij}| \right\}$$

(1) Tte valeur propre λ d'une matrice A appartient à l'un au moins des disques lignes de Gersgorin :

$$\forall \lambda \in \sigma(A), \exists i / \lambda \in D_i^{(l)}$$

(2) Tte valeur propre λ d'une matrice A appartient à l'un au moins des disques colonnes de Gersgorin

$$\forall \lambda \in \sigma(A), \exists j / \lambda \in D_j(l)$$

=> Ttes les valeurs propres d'une matrice A appartiennent à la région du plan complexe définie par l'intersect° des disques lignes / colonnes.
Si on obtient m disques disjoints, chacun de ces disques contient exactem^t une valeur propre.

Si λ valeur propre => $\bar{\lambda}$ valeur propre

* On introduit deux types de vecteurs propres associés à une valeur propre :

1°) vecteur propre droit : $Au = \lambda u$
2°) vecteur propre gauche : $v^T A = \mu v^T$

<u>Rq 1</u> : Soit $v^T A = \mu v^T$ vecteur propre gauche de A alors v est un vecteur propre droit de A^T : $A^T v = \bar{\mu} v$ où $\bar{\mu}$ conjugué de μ.
<u>Rq 2</u> : A tte valeur propre de λ correspond des vecteurs propres droits <u>et</u> gauches.

* Soit u un vecteur droit de λ.
Soit v un vecteur gauche de μ ($\lambda \neq \mu$).
Alors $v^T u = 0$ (ils st orthogonaux).

* Soit $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ (Diagonalisable) avec n valeurs propres $\lambda_1 \dots \lambda_n$ (pas forcément distinctes)
Soit $A + \Delta A$ ~~la~~ matrice perturbée de valeurs propres $\mu_1 \dots \mu_n$.
$\Rightarrow \forall \mu_i, \exists \lambda_j$ tq $|\mu_i - \lambda_j| \leq 4 (\|A\|_2 + \|A + \Delta A\|_2)^{1-\frac{1}{n}} * \|\Delta A\|_2$

* Soit A et $A + \varepsilon A$; Soit λ valeur propre de A, alors la valeur propre $\lambda(\varepsilon)$ de $A + \varepsilon A$ vérifie : $|\lambda(\varepsilon) - \lambda| = o(\varepsilon^{1/m})$ avec m la multiplicité de λ. De plus, λ simple $\Rightarrow$

$$\lambda = \lim_{|\varepsilon| \to 0} \frac{\lambda(\varepsilon) - \lambda}{\varepsilon} = \frac{v^T A u}{v^T u} \quad \text{avec} \begin{cases} v = \text{vect propre gauche} \\ u = \text{— — droit} \end{cases}$$

Si on note U la matrice telle que $U^{-1} A U = \mathrm{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$
alors : $|\mu_i - \lambda_j| \leq K_\infty(U) . \|\Delta A\|_\infty$

* Si A est symétrique et $A + \Delta A$ symétrique :

$$|\mu_i - \lambda_j| \leq \|\Delta A\|_2$$

II

* Les 4 espaces fondamentaux d'une application linéaire de matrice $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

- $R(A) = \{ y \in \mathbb{R}^m / y = Ax, x \in \mathbb{R}^n \} \subset \mathbb{R}^m$
- $R(A^T) = \{ x \in \mathbb{R}^n / x = A^T y, y \in \mathbb{R}^m \} \subset \mathbb{R}^n$
- $N(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n / Ax = 0 \} \subset \mathbb{R}^n$
- $N(A^T) = \{ y \in \mathbb{R}^m / A^T y = 0 \} \subset \mathbb{R}^m$.

- $\dim(R(A)) = \dim(R(A^T)) = r$
- $\dim(N(A)) = n - r$.
- $\dim(N(A^T)) = m - r$

- $rg(AB) = rang\, B - \dim(N(A) \cap R(B)) \leq \min(rg A, rg B)$
- $rg(A^T A) = rg(A) = rg(AA^T)$
- $R(A^T A) = R(A^T)$
- $R(AA^T) = R(A)$.
- $N(A^T A) = N(A)$
- $N(AA^T) = N(A^T)$

* Deux ss-espaces G et H de E st complémentaires ssi ils st en somme direct ($G \cap H = \phi$) et

$$G \oplus H = E$$

Alors $\forall x \in E$, $\exists! (f, h) \in F \times H$ tq $x = f + h$.

↳ f est la project° de x dans F.

↳ h est la project° de x dans H.

* Soit F, G deux ss-espace de E

avec $\begin{cases} B_F = (f_1 \dots f_r) \\ B_G = (g_1 \dots g_{n-r}) \end{cases}$ et $E = F \oplus G$

On pose $B = [F/G] = [f_1, \dots f_r, g_1 \dots g_{n-r}]$

Alors on appelle opérateur de projection P_x dans F la matrice qui vérifie :

$$P_x = f.$$

On a $P = B \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B^{-1}$

Le projecteur dans G, noté Q vaut

$$Q = (I - P) = B \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} B^{-1}$$

Les opérateurs P et Q st uniques, et ils st idempotents : $P^2 = P$ et $Q^2 = Q$.

* Théorème :

. $R(A)^\perp = N(A^T)$; $N(A)^\perp = R(A^T)$

. $\mathbb{R}^m = R(A) \oplus R(A)^\perp = R(A) \oplus N(A^T)$

. $R^n = N(A) \oplus N(A)^\perp = N(A) \oplus R(A^T)$

* Projection orthogonale d'un vecteur unitaire u :

$$P = I - uu^T \Rightarrow x = (I - P)x + Px$$

avec $(I - P)x \perp Px$

* Décomposit° en valeurs singulières

- Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Les valeurs singulières σ de A sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice $A^T A$ (ou AA^T), c-a-d $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, $i = 1 \dots r$ où r est le rg de A.

- Tte matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rg $r \leq \min(m, n)$ admet une factorisation :

$$A = U \Delta V^T$$

avec

→ $U = [u_1, u_2 \dots u_m] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrice orthogonale dont les colonnes u_i sont les vecteurs propres de la matrice AA^T

→ $V = [v_1, v_2 \dots v_m] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ matrice orthogonale dont les colonnes v_i sont les vecteurs propres de la matrice $A^T A$.

→ $\Delta \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice diagonale des valeurs singulières

* On a les résultats suivants :

$$A v_i = \begin{cases} \sigma_i u_i & \text{pour } i = 1 \dots r \\ 0 & \text{pour } i = r+1 \dots m \end{cases} ; \quad A^T u_i = \begin{cases} \sigma_i v_i & \text{pour } i = 1 \dots r \\ 0 & \text{pour } i = r+1 \dots m \end{cases}$$

* Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rg $r = \min(m, n)$; $B = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$. Les valeurs singulières de A sont $\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_r$ ssi les valeurs singulières non nulles de B sont $\sigma_1 \dots \sigma_r, -\sigma_1 \dots -\sigma_r$.

Rq :
$$R(A) = \text{vect}(u_1 \dots u_r)$$
$$N(A) = \text{vect}(v_{r+1} \dots v_n)$$

* Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et la DVS de $A = UAV^*$ avec valeurs singulières $\sigma_1 \geq \sigma_2 \dots \geq \sigma_r > 0$

Alors on a : $\|A\| = \sigma_1$.

Si $m = n$ et A régulière, alors $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_n}$

$\hookrightarrow K(A) = \|A\| . \|A^{-1}\| = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$

* On cherche $\min_E \{ \|E\|_2 \, / \, A + E \text{ singulière} \}$

or : $\|x\|_2 = \|A^{-1} E x\|_2 \leq \|A^{-1}\|_2 \, \|E\|_2 \, \|x\|_2$ avec $x \in N(A+E)$

$\Rightarrow \min_E \{ \|E\|_2 / A + E \text{ singulière} \} \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|_2}$

La distance de singularité est :

$$\sigma_n = \min_E \{ \|E\|_2 / A + E \text{ singulière} \}$$

La distance relative est

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_1} = \min_E \left\{ \frac{\|E\|_2}{\|A\|_2} / A + E \text{ singulière} \right\}$$

* Soient $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $A + \Delta A$ sa matrice perturbée, tes deux de rg r. On note $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ les valeurs singulières de A et $\tau_1 \geq \dots \geq \tau_r > 0$ celles de $A + \Delta A$. Alors $|\sigma_k - \tau_k| \leq \|\Delta A\|_2$

et
$$\left(\sum_1^r (\sigma_k - \tau_k)^2 \right)^{1/2} \leq \|\Delta A\|_2$$

III

* On appelle pseudo-inverse d'une matrice A (noté A^+) l'unique matrice qui vérifie :

(i) $A A^+ A = A$

(ii) $A^+ A A^+ = A^+$

(iii) $(AA^+)^T = AA^+$

(iv) $(A^+A)^T = A^+A$

* Calcul d'une pseudo inverse :

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et sa DVS $A = U \Delta V^T$

Alors sa pseudo inverse est donnée par

$$A^+ = V \Delta^{-1} U^T$$

↳ Δ étant diagonale elle est facile à inverser.

Δ $(n \times m)$ / $\Delta^{-1} = (m \times n)$

* La pseudo inverse n'est pas continue ; ceci va poser des pb dans le cadre des matrices perturbées : une petite variation des éléments de A peut provoquer une grande variation des valeurs de A^+. On dit que ce type de pb est mal posé. On introduit la notion de conditionnement d'une matrice rectangulaire :

$$K^+(A) = \|A\| . \|A^+\|.$$

* Soit $Ax = b$ et la perturbat° $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$.
L'erreur relative est bornée par :

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq K^+(A) . \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

* Le pb des moindres carrés ($\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|y - Xa\|_2$) a au moins une solution a_0.
Si a_1 est une autre solution alors $Xa_1 = Xa_0$. Le résidu $r = y - Xa_0$ est unique et il est solution de l'équation $X^T r = 0$.
Chaque pt a_0 qui réalise le minimum est aussi solution du système d'équat° normales :

$$a_0 = (X^T X)^{-1} X^T y = X^+ y$$

Rq : pour éviter que le pb des moindres carrés soit mal posé, il faut imposer que le rg de la matrice X soit égal au nb n de ses colonnes.